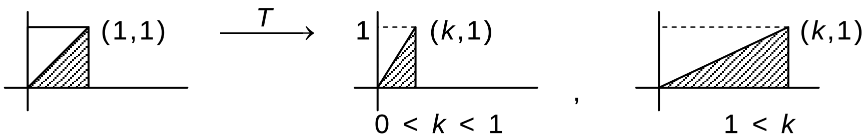
IX. Kapitel Anwendungen und Ergänzungen

2. Geometrie bijektiver linearer Operatoren auf $\mathbb{R}^2$

i) $[T] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

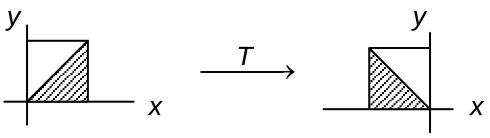


$0 < k < 1$ — Kompression, $1 < k$ — Expansion

$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$: analog in y-Richtung

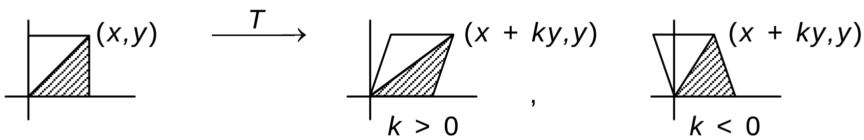
Die Standardmatrix $[T]$ von $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für $k < 0$ erhält man mit $K' = -K > 0$

$[T] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Erst Spiegelung an der y-Achse, dann Kompr. oder Exp. in x-Richtung.



$[T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:



$k > 0$, $k < 0$ — Scherungen

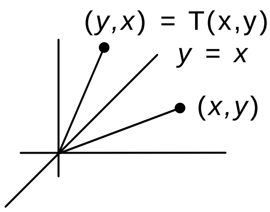
$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$: analog in y-Richtung

Satz IX.2 Jeder Operator $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$ mit $\det(A) \neq 0$ lässt sich als Hintereinanderausführung von Scherungen, Kompressionen, Expansionen und Spiegelungen darstellen.

Bew.: $A = E_1 \dots E_n$, E_i : Elementarmatrizen (Satz I.12) und das folgende NB

NB Außer den oben angegebenen Elementarmatrizen ($\hat{=}$ Multiplikation einer Zeile mit $k \neq 0$, Addition des k-fachen einer Zeile zu einer anderen) ist noch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\hat{=}$ Zeilenvertauschung) eine Elementarmatrix.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$



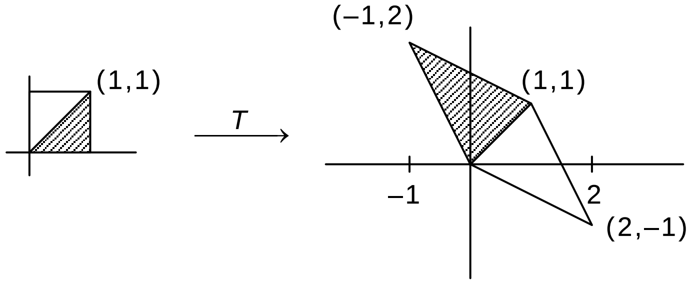
Spiegelung an der Geraden $y = x$

NB Es reichen allerdings schon zwei Arten von Elementarmatrizen, denn

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4} \begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z. B. $\left[T\right] = A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{1} = E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$$

Also ist $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Satz IX.3</u> Für $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$, $\det(A) \neq 0$ gilt

- i) T bildet Gerade auf Gerade ab,
- ii) " " durch Null Gerade durch Null ab,
- iii) " " parall. Gerade auf parall. Gerade ab,
- iv) " " Strecke $\overline{PQ}$ auf Strecke $\overline{T(P)\ T(Q)}$ ab.

Bew.: i) $u = u_0 + tv$, $u' = Au = Au_0 + tAv = u'_0 + tv'$ ii) – iv) Übung

$v \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v' = Av \neq 0$

z. B. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $y = 2x + 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - y' \\ -2x' + 3y' \end{pmatrix}$

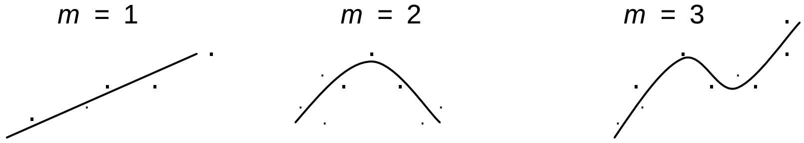
$$\begin{aligned} x &= x' - y' \\ 2x + 1 = y &= -2x' + 3y' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 1 = 5y' - 4x' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{4}{5}x' + \frac{1}{5}$$

3. Methode der kleinsten Quadrate (Ergänzung zu Kapitel VI.4)

Problem: Aus (grundsätzlich fehlerbehafteten) experimentell ermittelten Daten (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ die "bestmögliche" Funktion $y = f(x)$ herstellen.

Ist z. B. aus theoretischen Gründen $f(x) = p(x)$ ein Polynom, so sind die "passendsten" Koeffizienten a_i von $y = p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ zu ermitteln.

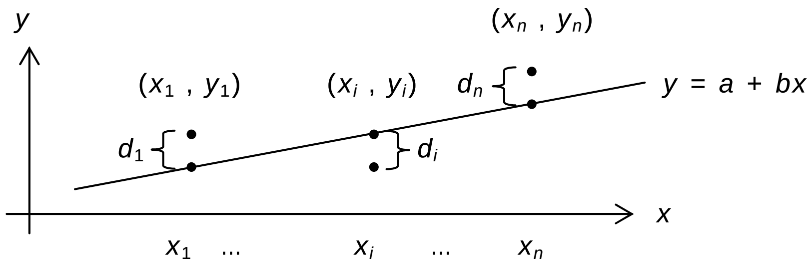
$m = 1$ $\qquad$ $m = 2$ $\qquad$ $m = 3$



Approximation durch eine <u>Gerade $y = a + bx$</u> führt zu

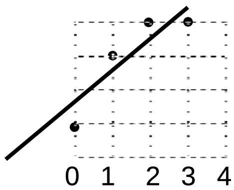
$$\begin{matrix} y_1 = a + bx_1 \\ y_2 = a + bx_2 \\ \vdots \\ y_n = a + bx_n \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = Av \qquad y \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^2,\ A \in \mathbb{R}^{n \times 2}.$$

Da im Allgemeinen die Messpunkte (x_i, y_i) nicht auf einer Geraden liegen, ist das LGS $Av = y$ unlösbar. Daher wird eine <u>Näherungslösung</u> $v^* = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$, bzw. eine Näherungsgerade y = a* + b*x gesucht. <u>Diese soll</u> den Fehler $\| Av - y \|$, d. h. $\| Av - y \|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$, $d_i = | a + bx_i - y_i |$, d. h. <u>die Summe der Fehlerquadrate d_i^2 minimieren</u>. Es wird also hier mit dem Standardskalarprodukt und der damit erzeugten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ auf $\mathbb{R}^n$ argumentiert.



Nach Satz VI.13 ist die Näherungslösung v^* von $Av = y$ eine Lösung des Normalsystems $A^T Av = A^T y$, die nach Satz VI.14 NB eindeutig ist, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, und gegeben ist durch $\underline{v^* = (A^T A)^{-1} A^T y}$.

z. B. (0,1), (1,3), (2,4), (3,4)



$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \qquad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = v^* = (A^T A)^{-1} A^T y = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Näherungsgerade: $\underline{y = 3/2 + x}$

Ist allgemeiner $y = p(x)$ ein Polynom m-ten Grades, so ergibt sich analog

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_1^m \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_m x_n^m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad y = Av \ , \quad A \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)} .$$

Näherungslösung: $$\begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_m^* \end{pmatrix} = v^* = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y \ .$$

z. B. <u>Freier Fall:</u> $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$: vertikaler Abstand zu einem festen Bezugspunkt zur Zeit t

s_0 : $s(0)$, v_0 : Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, g : Erdbeschleunigung

Messdaten (fehlerbehaftet):

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	Sekunden
s	−0,18	0,31	1,03	2,48	3,73	Fuß

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 \\ 1 & 0,2 & 0,04 \\ 1 & 0,3 & 0,09 \\ 1 & 0,4 & 0,16 \\ 1 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} , \quad v^* = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \begin{pmatrix} -0,18 \\ 0,31 \\ 1,03 \\ 2,48 \\ 3,73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,35 \\ 16,1 \end{pmatrix} .$$

Mit 1 Fuß = 0,3048 m ergibt sich $s_0^* = -0,122\ m$ $\quad v_0^* = 0,107\,\frac{m}{s}$ $\quad \underline{\underline{g^* = 9,815\,\frac{m}{s^2}}}$.