VIII. Kapitel Lineare Transformationen

1. Definition und Beispiele

Def. Eine "Vorschrift" T, die jedem Element v aus einer Menge V genau ein Element w =:T(v) aus einer Menge W zuordnet, heißt (totale) Abbildung von V nach W und wird durch $T : V \to W \quad v \mapsto w = T(v)$ symbolisiert, d. h.

$$\begin{array}{l} T : V \to W \\ \quad v \mapsto w = T(v) \end{array} \text{ ist Abbildung } :\Leftrightarrow \bigwedge_{v \in V} \bigvee_{w \in W} T(v) = w \text{ und } \bigwedge_{u,v \in V} u = v \Rightarrow T(u) = T(v)$$

NB Um den etwas schwammigen Begriff "Vorschrift" zu vermeiden, kann eine (totale) Abbildung $T : V \to W$ als linkstotale und rechtseindeutige Relation $T \subseteq V \times W$ definiert werden; siehe Literatur.

Def. (vgl. IV. Kapitel 2) Seien V, W Vektorräume über denselben Körper K.
Eine Abbildung $\underline{T : V \to W}$ heißt lineare Transformation (Homomorphismus), wenn gilt:

i) $\bigwedge_{u,v \in V} T(u+v) = T(u) + T(v)$, Additivität

ii) $\bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{u \in V} T(ku) = kT(u)$. Homogenität

NB Die Linearität, d. h. Additivität und Homogenität, ist äquivalent zu
$\bigwedge_{k_1, k_2 \in K} \bigwedge_{u_1, u_2 \in V} T(k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 T(u_1) + k_2 T(u_2)$. Übung.

Für $V = W$ heißt T linearer Operator auf V .

z. B. i) $T : V \to V$, $T(v) = k_0 v$, $k_0 \in K$

ii) Orthogonalprojektion $\text{proj}_W : V \to W$ auf einen endlichdim. Unterraum W eines euklid. Vektorraums V, d. h. $T(u) = \text{proj}_W\, u = \sum_{i=1}^{r} \langle u , w_i \rangle w_i$, wobei $\{w_1 , \ldots , w_r\}$ ONB von W ist.
Beweis der Linearität von i) und ii) zur Übung.

iii) Mit einer Basis $B = \{v_1 , \ldots , v_n\}$ von V ist – wegen der eindeutigen Darstellung $u = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$ für jedes $u \in V$ – eine bijektive*, d. h. umkehrbare lineare Transformation (Isomorphismus) gegeben durch
$T : V \to K^n$, $T(u) = (k_1 , \ldots , k_r) = (u)_B$ = Koordinatenvektor von u bzgl. B

Zur Linearität: $u = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$, $u' = k_1' v_1 + \ldots + k_n' v_n$

$u + u' = (k_1 + k_1')v_1 + \ldots + (k_n + k_n')v_n$, $ku = kk_1 v_1 + \ldots + kk_n v_n$

$$T(u+u') = (k_1 + k_1' , \ldots , k_n + k_n') = (k_1 , \ldots , k_n) + (k_1' , \ldots , k_n') = T(u) + T(u')$$
$$T(ku) = (kk_1 , \ldots , kk_n) = k(k_1 , \ldots , k_n) = kT(u)$$

* zur Bijektivität siehe Def. Abschnitt 3

iv) Sei V eukl. Vektorraum und $v_0 \in V$; $T: V \to \mathbb{R}$, $T(u) = \langle u, v_0 \rangle$

v) $D: C^1(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$

$f \to f'$, der Operator D ist linear, denn $(f+g)' = f' + g'$ und $kf' = (kf)'$;

ebenso

vi) $I: C(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$

$f \to I(f)$, $\quad (I(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\quad$ denn $\int (f+g) = \int f + \int g$, $\quad \int kf = k \int f$

vii) $T: P_n \to P_{n+1}$, $T(p)(x) = xp(x)$, denn

$$T(p_1 + p_2)(x) = x(p_1 + p_2)(x) = x\left(p_1(x) + p_2(x)\right) = xp_1(x) + xp_2(x) = T(p_1)(x) + T(p_2)(x)$$
$$= \left(T(p_1) + T(p_2)\right)(x)$$
$$T(kp)(x) = x(kp)(x) = xkp(x) = kxp(x) = kT(p)(x)$$

Satz VIII.1 Seien V, W zwei K-Vektorräume, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Transformation $T: V \to W$ mit $T(v_1) := w_1, \dots, T(v_n) = w_n$.

Bew.: i) Existenz: Für $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n \in V$ wird $T(v)$ definiert durch $T(v) = k_1w_1 + \dots + k_nw_n \in W$.

Wegen der Eindeutigkeit der k_i's ist die Zuordnung eine Abbildung, deren Additivität mit $u = l_1v_1 + \dots + l_nv_n$, $u + v = (l_1 + k_1)v_1 + \dots + (l_n + k_n)v_n$ gezeigt ist durch

$$T(u+v) \underset{\text{Def.}}{=} (l_1 + k_1)w_1 + \dots + (l_n + k_n)w_n = l_1w_1 + \dots + l_nw_n + k_1w_1 + \dots k_nw_n \underset{\text{Def.}}{=} T(u) + T(v).$$

Mit $k \in K$ und $ku = kl_1v_1 + \dots + kl_nv_n$ ist $T(ku) = (kl_1)w_1 + \dots + (kl_n)w_n$

$$= k(l_1w_1 + \dots + k_nw_n) \underset{\text{Def.}}{=} kT(u),$$

d. h., auch die Homogenität ist gültig.

ii) Eindeutigkeit: Seien T_1, $T_2: V \to W$ lineare Transformationen mit $T_1(v_i) = w_i = T_2(v_i)$ ür f$i = 1, \dots, n$; dann ist

$$T_1(v) = T_1(k_1v_1 + \dots + k_nv_n) \underset{T_1 \text{ lin}}{=} k_1T_1(v_1) + \dots + k_nT_n(v_n)$$
$$\underset{\text{Vor.}}{=} k_1w_1 + \dots + k_nw_n \underset{\text{Vor.}}{=} k_1T_2(v_1) + \dots + k_nT_2(v_n) \underset{T_2 \text{ lin}}{=} T_2(k_1v_1 + \dots + k_nv_n) = T_2(v).$$

□

z. B. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Mit den Matrizen $B = \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix}w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T(v_1) & T(v_2) & T(v_3)\end{pmatrix}$ gerechnet, erhält man für $v \in \mathbb{R}^3$

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = Bk, \quad k = \begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}^T \qquad T(v) = k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 = Ck.$$

Da B invertierbar ist, folgt

$$T(v) = CB^{-1}v = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}v = \begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\3 & -4 & 1\end{pmatrix}v$$

bzw. mit $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = v \in \mathbb{R}^3$ $\qquad T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4x_1 & -2x_2 & -x_3\\3x_1 & -4x_2 & +x_3\end{pmatrix}.$

Satz VIII.2

i) Für lin. Transf. T ist $T(0)=0$, denn $0=0T(v)=T(0v)=T(0)$.

ii) Für lin. Transf. $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$ gilt: Die Hintereinanderausführung (Komposition) $T_2 \circ T_1 : U \to W$ mit $T_2 \circ T_1(u) := T_2\left(T_1(u)\right)$ ist linear.

Bew.: $$T_2 \circ T_1(ku+lv) = T_2\left(T_1(ku+lv)\right) \underset{T_1 \text{ lin}}{=} T_2\left(kT_1(u)+lT_1(v)\right)$$
$$\underset{T_2 \text{ lin}}{=} kT_2\left(T_1(u)\right)+lT_2\left(T_1(v)\right) = kT_2 \circ T_1(u)+lT_2 \circ T_1(v).$$

Satz VIII.3 Seien V und W K-Vektorräume, dann gilt für lineare Transformationen T , T_1 , $T_2 : V \to W$ und $k \in K$:

$$T_1 + T_2 : V \to W \qquad kT : V \to W$$

sind lineare Transformationen, wobei die Summe und das skalare Vielfache von lin. Transf. punktweise definiert ist, durch $(T_1+T_2)(v) := T_1(v)+T_2(v)$, $(KT)(v) := KT(v)$. Beweis zur Übung.

NB Die Menge aller lin. Transf. $T : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorr. V und $W =: \mathrm{Hom}_K(V,W)$ trägt also die Struktur eines K-Vektorraums. Beweis zur Übung.

2. Kern und Bild

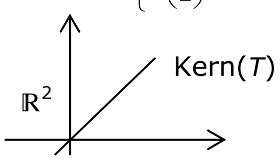
Def. Für lin. Transf. $T : V \to W$ wird definiert $\mathrm{Kern}(T) := \{v \mid v \in V,\ T(v)=0\} \subseteq V$

$\mathrm{Bild}(T) := \{T(v) \mid v \in V\} \subseteq W$

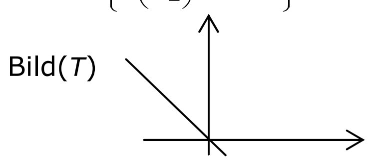
z. B. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,\ y) \mapsto (x-y,\ y-x) \quad \Leftrightarrow \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Kern}(T) = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathrm{Bild}(T) = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$



$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$



Satz VIII.4 i) $\mathrm{Kern}(T)$ ist Unterraum von V , ii) $\mathrm{Bild}(T)$ ist Unterraum von W.

Bew.: i) α) $T(0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0 \in \mathrm{Kern}(T)$ $\qquad$ β) Übung

γ) $k \in K,\ v \in \mathrm{Kern}(T) \quad \Rightarrow \quad T(kv) = kT(v) = k0 = 0 \quad \Rightarrow \quad kv \in \mathrm{Kern}(T)$

ii) α) $0 = T(0) \quad \Rightarrow \quad 0 \in \mathrm{Bild}(T)$

β) $w,\ w' \in \mathrm{Bild}(T) \underset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ es ex. $v,\ v' \in V$ mit $T(v)=w$ und $T(v')=w'$

$\Rightarrow \quad w+w' = T(v)+T(v') = T(v+v') \in \mathrm{Bild}(T)$ $\qquad$ γ) Übung

Def. von Rang und Defekt lin. Transf. durch $\dim \mathrm{Kern}(T) =: \mathrm{def}(T)$, $\dim \mathrm{Bild}(T) =: \mathrm{rang}(T)$

Satz VIII.5 Dimensionsformel für lin. Transformationen

Für lin. Transf. $T : V \to W$ mit $\dim V = n$ gilt

$\dim \mathrm{Kern}(T) + \dim \mathrm{Bild}(T) = \dim V$ bzw. $\mathrm{def}(T) + \mathrm{rang}(T) = n$

Bew.: $\dim \text{Kern}(T) = 0$ oder $\dim \text{Kern}(T) = n = \dim V$ zur Übung.

Sei $0 < \dim \text{Kern}(T) < n$ und $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von Kern(T), die sich nach Satz V.14 zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_r, \; v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ von V ergänzen lässt. Der Satz ist bewiesen, wenn $B = \{T(v_{r+1}), \ldots, T(v_n)\}$ eine Basis von Bild(T) ist, da dann $\dim \text{Kern}(T) + \dim \text{Bild}(T) = r + \#(B) = r + (n-r) = n$ ist.

Gezeigt wird i) span$B$ = Bild(T), ii) B ist lin. unabhängig.

zu i) "$\subseteq$" ist klar, da $B \subseteq \text{Bild}(T)$ und Bild(T) UVR von W ist nach Satz VIII.4.

"$\supseteq$": Sei $w \in \text{Bild}(T)$, dann exist. $v \in V$ mit $T(v) = w$ und $v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$.

Also ist
$$\begin{aligned} w &= T(k_1 v_1 + \ldots + k_r v_r + k_{r+1} v_{r+1} + \ldots + k_n v_n) \\ &= k_1 T(v_1) + \ldots + k_r T(v_r) + k_{r+1} T(v_{r+1}) + \ldots + k_n T(v_n) \\ &= k_{r+1} T(v_{r+1}) + \ldots + k_n T(v_n) \in \text{span}\, B, \end{aligned}$$
da nach Vor. $v_i \in \text{Kern}(T)$ ist für $i = 1, \ldots, r$.

zu ii) Aus $k_{r+1} T(v_{r+1}) + \ldots + k_n T(v_n) = 0$ folgt $T(k_{r+1} v_{r+1} + k_n v_n) = 0$ und damit $v = k_{r+1} v_{r+1} + \ldots + k_n v_n \in \text{Kern}(T)$.

Da $\{v_1, \ldots, v_r\}$ Basis von Kern(T) ist, hat v auch die Darstellung $v = k_1 v_1 + \ldots + k_r v_r$, woraus $0 = v - v = k_1 v_1 + \ldots + k_r v_r - k_{r+1} v_{r+1} - \ldots - k_n v_n$ folgt.

Da $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, also auch lin. unabh. ist, folgt $k_1 = \ldots = k_r = \underline{k_{r+1} = \ldots = k_n = 0}$. □

3. Inverse Transformationen

<u>Def.</u> Eine Abbildung $T: V \to W$ heißt <u>injektiv</u> wenn gilt: $\bigwedge_{u, v \in V} T(u) = T(v) \;\Rightarrow\; u = v$.

<u>Satz VIII.6</u> Für lin. Transf. $T: V \to W$ gilt: $\underline{\underline{T \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; \text{Kern}(T) = \{0\}}}$.

Bew.: "$\Rightarrow$" $u \in \text{Kern}(T) \;\Rightarrow\; T(u) = 0 = T(0) \underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} u = 0$

"$\Leftarrow$" $T(u) = T(v) \;\Rightarrow\; 0 = T(u) - T(v) = T(u - v) \underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} u - v = 0 \;\Rightarrow\; u = v$

NB Vgl. Satz V.24: $\text{Lös}(A \mid 0) = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \bigwedge_{b \in K^m} \#\big(\text{Lös}(A, b)\big) \le 1$, $T: K^n \to K^m$, $T(x) = Ax$

<u>Def.</u> Eine Abbildung $T: V \to W$ heißt <u>surjektiv</u>, wenn $\underline{\text{Bild}(T) = W}$ ist.

<u>Satz VIII.7</u> Für lin. Transf. $T: V \to W$ mit $\dim V = \dim W = n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\underline{\underline{T \text{ surjektiv} \;\Leftrightarrow\; T \text{ injektiv}}}$$

Bew.: T surjektiv $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\text{Bild}(T) = W \underset{\text{Satz V.15}}{\Leftrightarrow} \dim \text{Bild}(T) = \dim W \underset{\text{Vor.}}{=} \dim V \underset{\text{SatzVIII.5}}{\Leftrightarrow} \dim \text{Kern}(T) = 0$

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\text{Kern}(T) = \{0\} \underset{\text{Satz VIII.6}}{\Leftrightarrow} T$ injektiv

Def. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.
Eine bijektive lineare Abbildung (Transformation) heißt (Vektorraum-)Isomorphismus.

NB Um die Bijektivität einer linearen Transformation $T : V \to W$ mit $\dim V = \dim W = n \in \mathbb{N}_0$
nachzuweisen, genügt es also, nur die Injektivität oder nur die Surjektivität von T zu zeigen.

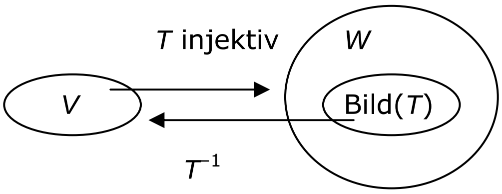
z. B. Die Koordinatenabbildung $T : V \to K^n$, $T(u) = (u)_B$ ist bijektiv, also ein Isomorphismus.

Satz VIII.8 und Definition

Zu einer injektiven lin. Transf. $T : V \to W$ lässt sich genau eine lin. Transf. $T^{-1} : \text{Bild}(T) \to V$ finden mit: $\bigwedge_{w \in \text{Bild}(T)} T\left(T^{-1}(w)\right) = w$, $\bigwedge_{v \in V} T^{-1}\left(T(v)\right) = v$; d. h.

$$\underline{T \circ T^{-1} = \text{Id}_{\text{Bild}(T)}, \qquad T^{-1} \circ T = \text{Id}_V};$$

wobei Id_M die identische Abbildung (Identität) $\text{Id}_M : M \to M$, $m \mapsto \text{Id}_M(m) := m$ auf M bezeichnet. $\underline{T^{-1}}$ wird Inverse von T genannt.



Bew.: Existenz und Eindeutigkeit: Übung

Linearität: Für $w, w' \in \text{Bild}(T)$ exist. $v, v' \in V$ mit $w = T(v)$, $w' = T(v')$; also ist

i) $T\left(T^{-1}(w + w')\right) = w + w' = T(v) + T(v') = T(v + v') = T\left(T^{-1}(w) + T^{-1}(w')\right)$

und daher $T^{-1}(w + w') = T^{-1}(w) + T^{-1}(w')$.

ii) $T\left(T^{-1}(kw)\right) = kw = kT(v) = T(kv) = T\left(kT^{-1}(w)\right)$

und daher $T^{-1}(kwv) = kT^{-1}(w)$.

Satz VIII.9 Fü r injektive lin. Transf. $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$ gilt

i) $T_2 \circ T_1 : U \to W$ ist injektive lin. Transf.

ii) $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} : \text{Bild}(T_2 \circ T_1) \to U$

Bew.:

zu i) Wegen Satz VIII.2 ist noch die Injektivität zu zeigen.

$$(T_2 \circ T_1)(u) = (T_2 \circ T_1)(v) \quad \Leftrightarrow \quad T_2\left(T_1(u)\right) = T_2\left(T_1(v)\right) \underset{T_2 \text{ inj.}}{\Rightarrow} T_1(u) = T_1(v) \underset{T_1 \text{ inj.}}{\Rightarrow} u = v$$

zu ii) Für $w \in \text{Bild}(T_2 \circ T_1)$ ex. $u \in U$ mit $(T_2 \circ T_1)(u) = w$. Da nach i) $T_2 \circ T_1$ injek. lin. Transf. ist, existiert nach Satz VIII.8 die Inverse $(T_2 \circ T_1)^{-1}$ mit $\underline{(T_2 \circ T_1)^{-1}(w) = u}$.

Andererseits liefern die Inversen der inj. lin. Transf T_1, T_2:

$$(T_2 \circ T_1)(u) = w \quad \Leftrightarrow \quad T_2(T_1(u)) = w \quad \Rightarrow \quad T_1(u) = T_2^{-1}(w) \quad \Rightarrow \quad u = T_1^{-1}(T_2^{-1}(w))$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(w)} \qquad \square.$$

4. Matrixdarstellung linearer Transformationen

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & W \\
K^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "B'^{-1}\circ T\circ B"'] & K^m \arrow[u, "B'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto, "T"] & T(v) \\
(v)_B \arrow[u, mapsto, "B"] \arrow[r, mapsto, "{[T]_{B'B}}"'] & (T(v))_{B'} \arrow[u, mapsto, "B'"']
\end{tikzcd}$$

$$\left[B'^{-1}\circ T\circ B\right] =: \left[T\right]_{B'B} \qquad\qquad \left[T\right]_{B'B}(v)_B = (T(v))_{B'}$$

$B = \{v_1,\dots,v_n\}$ Basis von V , $B' = \{v_1',\dots,v_m'\}$ Basis von W .

Da die hier auch mit B, B' bezeichneten Koordinatenabbildungen $B : K^n \to V$ mit $B(v)_B = v$ und $B' : K^m \to W$ mit $B'(w)_{B'} = w$ bijektive lin. Transf. sind (1. Abschnitt, Beispiel iii)), ist nach Satz VIII.2, 8
$B'^{-1}\circ T\circ B : K^n \to K^m$ linear und durch eine m x n-Matrix darstellbar, die mit
$[B'^{-1}\circ T\circ B] =: [T]_{B'B}$ bezeichnet wird (siehe dazu IV. Kap. 2).
Wie diese Darstellungsmatrix $[T]_{B'B}$ aussieht bzw. berechnet werden kann, besagt der folgende

Satz VIII.10 Für lin. Transf. $T : V \to W$ mit Basis B' von W gilt:
Die Koordinatenvektoren $(T(v_i))_{B'}$ der Bilder $T(v_i)$ einer Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V sind die Spalten der Darstellungsmatrix $[T]_{B'B}$, d. h. $[T]_{B'B} = \left((T(v_1))_{B'} \;\cdots\; (T(v_n))_{B'}\right)$.

Bew.: Da für $v_i \in B$ $(v_i)_B = (0,\dots,1,\dots,0) = e_i$ ist, und $[T]_{B'B}(v_i)_B = [T]_{B'B}\, e_i = i-$te Spalte von $[T]_{B'B}$, folgt mit $[T]_{B'B}(v_i)_B = (T(v_i))_{B'}$ die Behauptung.

z. B.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "T"] & P_2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "B"] \arrow[r, "{[T]_{B'B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "B'"']
\end{tikzcd}$$

$T(p) = T(p(x)) = x\,p(x)$

$B = \{p_1, p_2\} = \{1, x\}$ $\quad T(p_1) = T(1) = x \quad T(p_2) = T(x) = x^2$
$B' = \{p_1', p_2', p_3'\} = \{1, x, x^2\}$

$$(p)_B = (a_0 + a_1x)_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad (1)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(T(p))_{B'} = (a_0x + a_1x^2)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad (T(1))_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (T(x))_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\right]_{B'B} = \left((T(p_1))_{B'}\ (T(p_2))_{B'}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left[T\right]_{B'B}(p)_B = (T(p))_{B'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

z. B. $\quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & x_2 \\ -5x_1 & + & 13x_2 \\ -7x_1 & + & 16x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "T"] & \mathbb{R}^3 \\
\cdot \arrow[u, "B"] & \cdot \arrow[u, "B'"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[{[T]_{B'B}}]{} \mathbb{R}^3$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{v_1 , v_2\} \quad , \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{v_1' , v_2' , v_3'\}$$

Mit B, B' werden auch die Matrizen $B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ und $B' = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix}$ bezeichnet und man erhält:

$$x = k_1 v_1 + k_2 v_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = Bk \quad \Leftrightarrow \quad (x)_B = k = B^{-1}x \,,$$

$$Ax = T(x) = k_1' v_1' + k_2' v_2' + k_3' v_3' = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix} = B'k' \quad \Leftrightarrow \quad \big(T(x)\big)_{B'} = k' = B'^{-1}Ax \,.$$

Mit $[T]_{B'B}\ (x)_B = \big(T(x)\big)_{B'}$ folgt $[T]_{B'B}\ k = k'$, d. h $[T]_{B'B}\ B'^{-1}x = B^{-1}Ax$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$.

Also gilt: $[T]_{B'B}\ B^{-1} = B'^{\,-1}A \quad \Leftrightarrow \quad \underline{[T]_{B'B} = B'^{\,-1}AB}$.

$$[T]_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

NB Darstellungsmatrix von $T_A(x) = Ax \quad , \quad A \in K^{m \times n}$:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "T_A"] & K^m \\ K^n \arrow[u, "B"'] \arrow[r, "{[T_A]_{B'B}}"'] & K^m \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

$B = \{v_1 , \dots , v_n\}$ Basis von K^n und auch $B = (v_1 \ \cdots \ v_n) \in K^{n \times n}$

$B' = \{v_1' , \dots , v_m'\}$ Basis von K^m und auch $B' = (v_1' \ \cdots \ v_m') \in K^{m \times m}$

$$\left[T_A\right]_{B'B} = B'^{-1}AB \,.$$

NB i) Für lin. Operatoren $T : V \to V$ mit Basis B wird einfach $[T]_{BB} =: [T]_B$ gesetzt.

ii) $\underline{\left[\mathrm{Id}_V\right]_B = \mathbf{1}}$, de nn $\left[\mathrm{Id}_V\right] = \Big(\big(\mathrm{Id}(v_1)\big)_B \ \cdots \ \big(\mathrm{Id}(v_n)\big)_B\Big) = \big((v_1)_B \ \cdots \ (v_n)_B\big) = (e_1 \ \cdots \ e_n)$.

<u>Satz VIII.11</u> Komposition linearer Transformationen

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T_1"] & V \arrow[r, "T_2"] & W \\ K^n \arrow[u, "B"'] \arrow[r, "{[T_1]_{B''B}}"'] & K^r \arrow[u, "B''"'] \arrow[r, "{[T_2]_{B'B''}}"'] & K^m \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

Für die Darstellungsmatrix einer Komposition $T_2 \circ T_1$ gilt:

$$\underline{\underline{[T_2 \circ T_1]_{B'B} = [T_2]_{B'B''}\,[T_1]_{B''B}}}$$

Bew.: Übung

Daher ist für $U \xrightarrow{T_1} V_1 \xrightarrow{T_2} V_2 \xrightarrow{T_3} W$

mit Basen $B \qquad B''' \qquad B'' \qquad B'$

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1]_{B'B} = [T_3]_{B'B''}\,[T_2]_{B''B'''}\,[T_1]_{B'''B}$$ und analog für 4, 5, …, n lin. Transf.

NB Ist $T : V \to V$ injektiv (also bijektiv nach Satz VIII.7), so existiert nach Satz VIII.8

T^{-1} mit $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$, und daher ist

$$\mathbf{1} \underset{\text{s. o.}}{=} [\mathrm{Id}_V]_B = [T^{-1} \circ T]_B \underset{\text{Satz VIII.11}}{=} [T^{-1}]_B\,[T]_B \text{, also } \underline{\underline{[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}}} \ ,$$

z. B.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "T_1"] & P_2 \arrow[r, "T_2"] & P_2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "B"'] \arrow[r, "{[T_1]_{B'B}}"'] \arrow[rr, bend right, "{[T_2 \circ T_1]_{B'B} = [T]_{B'B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "B'"'] \arrow[r, "{[T_2]_{B'}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "B'"']
\end{tikzcd}$$

Basen:
$B = \{1,\ x\}$
$B' = \{1,\ x,\ x^2\}$

$$T_1\left(p(x)\right) = xp(x) \quad , \qquad T_2\left(q(x)\right) = q(3x-5)$$
$$T\left(p(x)\right) := T_2 \circ T_1\left(p(x)\right) = T_2\left(xp(x)\right) = (3x-5)\ p(3x-5)$$

$$\left(p(x)\right)_B = (a_0 + a_1 x)_B = (a_0 \ \ a_1)^T \quad , \qquad \left(q(x)\right)_{B'} = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)_{B'} = (b_0 \ \ b_1 \ \ b_2)^T$$

Darstellungsmatrix:

$$\left[T_2 \circ T_1\right]_{B'B} = \left[T\right]_{B'B} = \left(\left(T(1)\right)_{B'} \left(T(x)\right)_{B'}\right) = \begin{pmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Mit $\left[T\right]_{B'B}\left(p(x)\right)_B = \left(T\left(p(x)\right)\right)_{B'}$ erhält man $\left(T(a_0 + a_1 x)\right)_{B'} = \left[T\right]_{B'B}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a_0 & + & 25a_1 \\ 3a_0 & - & 30a_1 \\ & & 9a_1 \end{pmatrix}$

und daher $\boxed{T(a_0 + a_1 x) = -5a_0 + 25a_1 + (3a_0 - 30a_1)x + 9a_1 x^2}$.

Rechnung mit $\left[T\right]_{B'B} = \left[T_2 \circ T_1\right]_{B'B} = \left[T_2\right]_{B'}\left[T_1\right]_{B'B}$:

$$\left[T_1\right]_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \left[T_2\right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \left[T\right]_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1 x) &= (3x-5)\left(a_0 + a_1(3x-5)\right) = 3a_0 x + 9a_1 x^2 - 15a_1 x - 5a_0 - 15a_1 x + 25a_1 \\ &= -5a_0 + 25a_1 + (3a_0 - 30a_1)x + 9a_1 x^2 \end{aligned}$$

<u>5. Ähnlichkeit von Matrizen</u>

Basiswechsel

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] & & V \\
K^n \arrow[u, "B'"'] \arrow[rr, shift left, "P"] & & K^n \arrow[u, "B"'] \arrow[ll, shift left, "P^{-1}"] \\
(v)_{B'} \arrow[rr, leftrightarrow] & & (v)_B
\end{tikzcd}$$

Gemäß Satz VI.17, 18 ist $(v)_B = P(v)_{B'}$, mit der invertierbaren Übergangsmatrix P von $B' = \left\{v_1', \ldots, v_n'\right\}$ nach $B = \left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$

$$P = \left((v_1')_B \ \cdots \ (v_n')_B\right) = \left(\left(\mathrm{Id}(v_1')\right)_B \ \cdots \ \left(\mathrm{Id}(v_n')\right)_B\right) = \left[\mathrm{Id}\right]_{BB'}$$

$$P = \left[\mathrm{Id}\right]_{BB'} \quad , \qquad P^{-1} = \left[\mathrm{Id}\right]_{B'B}$$

Ist $V = K^n$, und werden aus den Basisvektoren die Matrizen $B = (v_1 \ \cdots \ v_n)$, $B' = (v_1' \ \cdots \ v_n')$ gebildet, so hat man $\left[\mathrm{Id}\right]_{BB'} = P = B^{-1}B'$; vgl. 3. Extrablatt und NB vor Satz VIII.11.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & V \arrow[r, "T"] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & V \\
K^n \arrow[u, "B'"] \arrow[r, "P"'] \arrow[rrr, bend right, "{[T]_{B'}}"'] & K^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "{[T]_B}"'] & K^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "P^{-1}"'] & K^n \arrow[u, "B'"]
\end{tikzcd}$$

Aus $\left[T\right]_{B'} = \left[\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id}\right]_{B'}$ folgt mit Satz VIII.11

$$\left[T\right]_{B'} = \left[\mathrm{Id}\right]_{B'B} \left[T\right]_{B} \left[\mathrm{Id}\right]_{BB'}$$

$$\underline{\left[T\right]_{B'} = P^{-1} \left[T\right]_{B} P} \, .$$

Damit erhält man den

Satz VIII.12 Sei $T: V \to V$ lin. Operator auf V, B und $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ Basen von V, $P = \left((v'_1)_B \ \cdots \ (v'_n)_B\right)$ die Übergangsmatrix von B' nach B; dann gilt für die Darstellungsmatrizen von T bzgl. B und B'

$$\underline{\underline{\left[T\right]_{B'} = P^{-1} \left[T\right]_{B} P}} \, .$$

Def. $A, B \in K^{n \times n}$,

$$\underset{A \sim B}{B \text{ ähnlich zu } A} \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_{P \in K^{n\times n}} B = P^{-1}AP \, .$$

NB Alle Darstellungsmatrizen eines lin. Operators $T: V \to V$ sind ähnlich nach Satz VIII.12.

Def. Eine Eigenschaft quadratischer Matrizen heißt ähnlichkeitsinvariant, wenn mit einer Matrix A auch jede zu ihr ähnliche diese Eigenschaft hat.

Ähnlichkeitsinvarianten

Invariante	**Beschreibung**
Determinante	$\det(A) = \det(P^{-1}AP)$
Invertierbarkeit	A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $P^{-1}AP$ ist invertierbar
Rang	$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(P^{-1}AP)$
Defekt	$\mathrm{def}(A) = \mathrm{def}(P^{-1}AP)$
Spur	$\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(P^{-1}AP)$
Charakteristisches Polynom	$\det(A - \lambda\mathbf{1}) = \det(P^{-1}AP - \lambda\mathbf{1})$
Eigenwerte	λ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ λ ist Eigenwert von $P^{-1}AP$
Eigenraumdimension	$\mathrm{dimEig}(A, \lambda) = \mathrm{dimEig}(P^{-1}AP, \lambda)$

Bew.: Übung

Def. i) $\lambda \in K$ heißt Eigenwert des lin. Operators $T: V \to V$, wenn es ein $x \in V$ gibt mit $T(x) = \lambda x$, $x \neq 0$.

ii) Jedes $x \in V$, $x \neq 0$, mit $T(x) = \lambda x$ heißt Eigenvektor (zum Eigenwert λ).

NB i) Für $x \in V$, $x \neq 0$ gilt:

x ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Kern}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) =: \mathrm{Eig}(T, \lambda)$

$=:$ Eigenraum von T zu λ

ii) $\lambda \in K$ ist Eigenwert von $T \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Kern}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$

Satz VIII.13 Für $T : V \to V$ mit $\dim V = n$ und Basis B gilt:

i) λ Eigenwert von $T \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$ Eigenwert von $[T]_B$.

ii) v ist Eigenvektor von T zu $\lambda \quad \Leftrightarrow \quad (v)_B$ ist Eigenvektor von $[T]_B$ zu λ.

Bew.: Übung