Vorläufige und fortlaufende Kurzfassung von
"Elementary Linear Algebra" – Howard Anton / Chris Rorres – 8th E, 2000

VII. Kapitel Eigenwerte, Eigenvektoren

1. Definition und erste Folgerungen

Def. i) $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$ heißt $\underline{\text{Eigenwert von } A \in \mathbb{R}^{n\times n}}$, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\underline{Ax = \lambda x \;,\; x \neq 0}\,.$$

ii) Jedes $\underline{x \in \mathbb{R}^n}$, $x \neq 0$, mit $\underline{Ax = \lambda x}$ heißt <u>Eigenvektor von A</u> (zum Eigenwert λ).

z. B. Wegen $\mathbf{1}x = 1x$ und $\mathbf{0}x = 0x$ folgt
$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat den Eigenwert $1 \in \mathbb{R}$ und sonst keinen, alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, sind Eigenvektoren.
$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ " " " $0 \in \mathbb{R}$ " " " " " , " , " " .

NB! $0 \in \mathbb{R}$ kann Eigenwert sein, aber $\underline{0 \in \mathbb{R}^n}$ ist definitionsgemäß <u>nie</u> Eigenvektor.

NB Ist x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so ist x auch Eigenvektor von A^K zum Eigenwert λ^K für $K \in \mathbb{N}$. $K = 2 : Ax = \lambda x \;\Rightarrow\; A^2x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$

Zur Berechnung der Eigenwerte: Da $Ax = \lambda x \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda\mathbf{1})x = 0$, gilt aufgrund von Satz I.12; II.7

! λ ist Eigenwert von $A \;\Leftrightarrow\; \det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0$ **!**

Also sind die Eigenwerte von A die reellen Lösungen von
$\underline{\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0}$ <u>charakteristische Gleichung</u>.

NB $\det(A) = 0 \;\Leftrightarrow\;$ 0 ist Eigenwert von A ; bzw. A invertierbar $\;\Leftrightarrow\;$ 0 ist kein Eigenwert von A .

<u>Satz VII.1 und Definition</u>

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

<u>charakteristisches Polynom von A</u>

mit $\boxed{c_n = (-1)^n ,\; c_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{sp}(A) ,\; c_0 = \det(A)}$.

Bew.: Betrachtung der signierten elementaren Produkte (s. II. Kapitel), (Übung).
$\det(A) = P(0) = c_0$.

Also ist $P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{sp}(A)\lambda + \det(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

NB $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat höchstens n verschiedene (reelle) Eigenwerte aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra. Erst im X. Kapitel werden auch die komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ betrachtet.

NB Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix A sind ihre Hauptdiagonalelemente a_{ii} , denn nach Satz II.2 gilt für diese $n \times n$ -Matrix

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) \;.$$

Def. <u>Eigenraum</u> von A zum Eigenwert λ := $\underline{\mathrm{Eig}(A,\lambda)} := \{\, x \mid (A-\lambda\mathbf{1})x = 0 \,\} = \{x \mid (\lambda\mathbf{1}-A)x = 0\}$

d. h. {Menge der Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ} = $\mathrm{Eig}(A,\lambda) \setminus \{\, 0 \,\}$.

$\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda)$ heißt <u>geometrische Vielfachheit</u> des Eigenwerts λ .

NB i) $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wegen $\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \mathrm{Nullr}(A-\lambda\mathbf{1}) = \mathrm{Lös}(A-\lambda\mathbf{1},0)$ und Satz V.3.

ii) Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten haben nur den Nullvektor gemeinsam, d. h. $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = \{0\}$ für $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (Übung)

z. B. Bestimmung der Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

charakt. Gleichung

$$0 = \det(A-\lambda\mathbf{1})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \det(\lambda\mathbf{1}-A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad (1\cdot\mathbf{1}-A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{Eig}(A,1)} = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}; \quad \text{Probe: } A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad (2\cdot\mathbf{1}-A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{Eig}(A,2)} = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r,s \in \mathbb{R} \right\}; \quad \text{Probe: } A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

z. B. siehe II. Kapitel 3.

z. B. $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ Drehung des / im $\mathbb{R}^2$ (s. Kap. IV.2)

$$\det(\lambda\mathbf{1}-D_\varphi) = (\lambda-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi = \pm n\pi, \ n \in \mathbb{N}_0 .$$

Also gilt für $\varphi \neq \pm n\pi$: $D_\varphi \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und D_φ hat keine (reellen) Eigenwerte.

z. B. $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

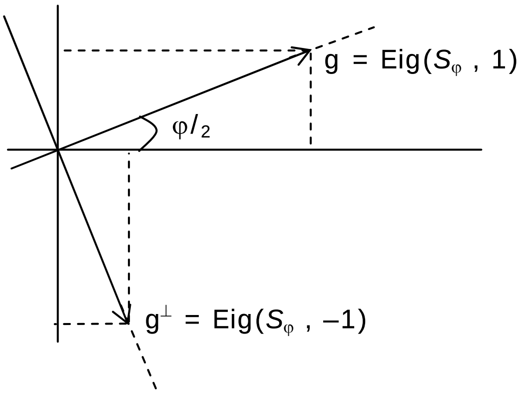
$$\det(\lambda\mathbf{1}-S_\varphi) = (\lambda-\cos\varphi)(\lambda+\cos\varphi) - \sin^2\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 - 1 = 0$$

Also sind $\lambda_{1/2} = \pm 1$ Eigenwerte von S_φ .

Mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus erhält man die zwei Eigenräume

$$\mathrm{Eig}(S_\varphi\,,\,1) = \left\{ r\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}\varphi\\ \sin\frac{1}{2}\varphi\end{pmatrix} \mid r\in\mathbb{R}\right\}, \quad \mathrm{Eig}(S_\varphi\,,\,-1) = \left\{ r\begin{pmatrix}\sin\frac{1}{2}\varphi\\ -\cos\frac{1}{2}\varphi\end{pmatrix} \mid r\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$S_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix} \qquad \text{Spiegelung an Gerade g}$$



Siehe dazu IV. Kapitel, Appendix I.

2. Diagonalisierung von Matrizen

Def. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es ein invertierbares $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit

$$P^{-1}AP = D \text{ (iagonalmatrix).}$$

Dass die Existenz einer solchen Matrix P äquivalent ist mit der Existenz einer Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A, besagt nun

Satz VII.2 Für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat n lin. unabh. Eigenvektoren.

Bew.: Folgt mit "P invertierbar $\Leftrightarrow$ die Spalten von P sind lin. unabhängig" aus

$$P^{-1}AP = D \quad\Leftrightarrow\quad A(p_1\ \cdots\ p_n) = (p_1\ \cdots\ p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad (Ap_1\ \cdots\ Ap_n) = (\lambda_1 p_1\ \cdots\ \lambda_n p_n) \quad\Leftrightarrow\quad Ap_1 = \lambda_1 p_1\,,\ \ldots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

NB Der Beweis zeigt auch, wie eine Matrix P aussehen muss, die A diagonalisieren soll; und wie die Diagonalmatrix D dann aufzuschreiben ist, d. h. in welcher Reihenfolge die Eigenwerte λ_i stehen müssen.

z. B. $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, Eigenwerte: $\det(A-\lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} \begin{aligned}&= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)\\ &= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)\end{aligned}$

Eigenvektoren zu

$\lambda_{1/2} = 2:\quad A-2\mathbf{1} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{Lös}(A-2\mathbf{1},0) = \left\{ r\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{p_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{p_2} \mid r,s\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda_3 = 1:\quad A-\mathbf{1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Lös}(A-\mathbf{1},0) = \left\{ r\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{p_3} \mid r\in\mathbb{R}\right\}$

Also $\quad P = (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

z. B. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2/3} = 2$ und die Eigenräume

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathrm{Eig}(A,2) = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

A hat keine drei lin. unabh. Eigenvektoren, ist also nach Satz VII.2 nicht diagonalisierbar.

<u>Satz VII.3</u> Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind lin. unabhängig; d. h., sind $v_1, \ldots, v_r$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so ist $\{v_1, \ldots, v_r\}$ lin. unabhängig.

Bew.: vollständige Induktion
$\{v_1\}$ lin. unabh., da Eigenvektor $v_1 \neq 0$.
Seien nun $v_1, \ldots, v_{r+1}$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$.
Zu zeigen ist der Schritt: $\{v_1, \ldots, v_r\}$ lin. unabhängig $\Rightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ lin. unabhängig.
Also: $k_1 v_1 + \ldots + k_r v_r + k_{r+1} v_{r+1} = 0 \; (*)$; damit ist auch $k_1 A v_1 + \ldots + k_r A v_r + k_{r+1} A v_{r+1} = 0$, und auch $k_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + k_r \lambda_r v_r + k_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \; (**)$ wegen $A v_i = \lambda_i v_i$.
$(**) - \lambda_{r+1}(*)$ impliziert $k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \cdots + k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = 0$. Aufgrund der Induktionsvor. folgt $k_i(\lambda_i - \lambda_{r+1}) = 0$ für $1 \le i \le r$, und da nach Vor. $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ für $i \neq j$ ist, schließlich $k_1 = \ldots = k_r = 0$. Wegen $v_{r+1} \neq 0$ ist demnach auch noch $k_{r+1} = 0$. □

NB Hat eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar.

Eine Verallgemeinerung von Satz VII.3 beinhaltet

<u>Satz VII.4</u> Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\underline{S_i} \subseteq \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ <u>linear unabhängige</u> Teilmengen von Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i. Dann ist

i) auch die Vereinigung der S_i, d. h. $\underline{S_1 \cup \cdots \cup S_r}$ <u>linear unabhängig</u>.

ii) für <u>Basen S_i</u> der Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$, bzw. mit
$\#(S_i) = \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i) =: \underline{n_i = \text{ geometrische Vielfachheit}}$ des Eigenwerts λ_i,
$\underline{\sum_{i=1}^{r} \#(S_i) = \sum_{i=1}^{r} n_i \le n}$, d. h., die Summe der geometrischen Vielfachheiten kann nicht größer als n sein für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Bew.: i) Folgt nach einigen Überlegungen und Rechnungen aus Satz VII.3. (Übung)
ii) $n \underset{\text{i)}}{\geq} \#(S_1 \cup \cdots \cup S_r) = \#(S_1) + \ldots + \#(S_r)$, da $S_i \cap S_j = \varnothing$ für $i \neq j$.

<u>Satz VII.5</u> **Kriterium zur Diagonalisierbarkeit**

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gilt

$$A \text{ diagonalisierbar} \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = n.$$

Bew.: "$\Rightarrow$": Nach Satz VII.2 gibt es eine Menge $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von lin. unabh. Eigenvektoren. Wird mit b_i die Anzahl der Eigenvektoren aus B zum Eigenwert λ_i bezeichnet, so ist $\underline{b_i \le \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = n_i}$ für jedes $1 \le i \le r$.

(B wird also in paarweise disjunkte Teilmengen B_i zerlegt, d. h. $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ mit $\#(B_i) \le \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ und $n = \#(B) = \#(B_1) + \dots + \#(B_r) = b_1 + \dots + b_r$).

Also folgt $n = \sum_{i=1}^{r} b_i \le \sum_{i=1}^{r} n_i \underset{\text{Satz VII.4}}{\le} n$ und damit die Behauptung.

"$\Leftarrow$" Werden aus jedem $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ $n_i = \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ lin. unabh. Eigenvektoren ausgewählt, so bilden sie zusammen, nach Satz VII.4, eine lin. unabh. Menge von $\sum_{i=1}^{r} n_i \underset{\text{Vor.}}{=} n$ Eigenvektoren. Damit folgt nach Satz VII.2 die Behauptung.

<u>Geometrische und algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $\lambda_i \in \mathbb{R}$</u>

<u>Def.</u> Die Vielfachheit, mit der $\lambda - \lambda_i$ als Faktor im charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$ auftritt, heißt <u>algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i</u> und wird mit m_i bezeichnet,

z. B. $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 4)(\lambda^2 + 1)$

$\lambda_1 = -1$, $m_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $m_2 = 1$

<u>Satz VII.6</u> Seien λ_1, ..., λ_r die Eigenwerte von A.

Dann gilt: i) $\bigwedge_{1 \le i \le r} n_i \le m_i$

ii) A diagonalisierbar $\Rightarrow \bigwedge_{1 \le i \le r} n_i = m_i$

Bew.: siehe Literatur

NB Lässt sich also das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1})$ einer n-reihigen(-spaltigen) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht in n Linearfaktoren $\lambda - \lambda_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ zerlegen,

d. h. $\sum_{i=1}^{r} n_i \le \sum_{i=1}^{r} m_i < n$, so ist A nicht diagonalisierbar nach Satz VII.5.

z. B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, $\lambda_1 = 1$, $A - 1 \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n_1 = \dim \mathrm{Eig}(A, 1) = \dim \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\} = 1 < 2 = m_1$

Also ist A nicht diagonalisierbar.

<u>Potenzen von diagonalisierbaren Matrizen</u>

lassen sich sehr einfach bestimmen, denn für A mit $P^{-1}AP = D$ gilt $A = PDP^{-1}$ und daher

$$A^K = PD^K P^{-1} \quad \text{mit} \quad D^K = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Ohne Beweis für $n \geq 3$ sei noch angegeben der

Satz VII.7 (*Cayley-Hamilton*)

Ist $P(\lambda) = c_n\lambda^n + \ldots + c_1\lambda + c_0$ das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt

$P(A) = c_n A^n + \ldots + c_1 A + c_0\mathbf{1} = 0$.

$n = 1$: Übung

$n = 2$:

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ ist $P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{sp}(A)\lambda + \det(A)$ und $P(A) = A^2 - \mathrm{sp}(A)A + \det(A)\mathbf{1} = \mathbf{0}$, denn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bd & ab+bc \\ da+cd & bd+c^2 \end{pmatrix} = (a+c)\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} - (ac-bd)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisierung mit orthogonalen Matrizen

Satz VII.8 und Definition

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelten mit dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ die Äquivalenzen

i) $\bigvee_{P\in O(n)} P^T AP = D$(iagonalmatrix), d. h. A ist orthogonal diagonalisierbar*

$\Leftrightarrow$ ii) A hat eine orthonormale Menge (ONS) von n Eigenvektoren

$\Leftrightarrow$ iii) A ist symmetrisch

*siehe auch: Hauptachsentransformation im IX. Kapitel

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ ii) Nach Satz VI.16 bilden die Spalten einer orthogon. Matrix ein ONS. Der Blick auf den Beweis von Satz VII.2 zeigt nun, dass die Spalten von P ein ONS von n Eigenvektoren bilden und dass umgekehrt aus einem ONS von n Eigenvektoren, die nach Satz VI.6 lin. unabhängig sind, eine diagonalisierende Matrix P gebildet werden kann.

i) $\Rightarrow$ iii) $P^{-1} = P^T,\ P^T AP = D \ \Rightarrow\ A^T = \left(PDP^T\right)^T = PD^T P^T = PDP^T = A$

iii) $\Rightarrow$ i) siehe Literatur

Satz VII.9 Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

i) Eigenvektoren aus verschiednen Eigenräumen sind orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$.

ii) Die charakteristische Gleichung $P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0$ hat keine komplexen Lösungen, d. h., A hat nur reelle Eigenwerte.

Bew.: i) Sei $v_1 \in \mathrm{Eig}(A,\lambda_1)$, $v_2 \in \mathrm{Eig}(A,\lambda_2)$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

dann ist $\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = Av_1 \cdot v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T Av_2 = v_1 \cdot \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1 \cdot v_2$, d. h.

$0 = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 - \lambda_2 v_1 \cdot v_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)v_1 \cdot v_2$. Also folgt $v_1 \cdot v_2 = 0$, da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ nach Vor.

ii) Da in den Kapiteln I, II (Matrizen, Determinanten) auch der Körper $K = \mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen zugelassen ist, gibt es für eine Lösung $\lambda = \alpha + \beta\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ von $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0$ ein $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}^n$, d. h. $x, y \in \mathbb{R}^n$, mit $Az = \lambda z$, $z \neq 0$.

Aus $A(x + y\mathrm{i}) = (\alpha + \beta\mathrm{i})(x + y\mathrm{i})$ erhält man $Ax = \alpha x - \beta y$ $\quad Ay = \alpha y + \beta x$,

und daraus $\alpha y^T x - \beta y^T y = y^T Ax = y^T A^T x = x^T Ay = \alpha x^T y + \beta x^T x$.

Wegen $x^T y = y^T x$ folgt schließlich $0 = \beta x^T x + \beta y^T x = \beta\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ und damit

$\underline{\underline{\beta = 0}}$, da $z = x + y\mathrm{i} \neq 0$ bzw. $x \neq 0$ oder $y \neq 0$.

Rezept zur orthogonalen Diagonalisierung einer symmetr. Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Schritt: Bestimmung aller Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ von A.
2. Schritt: Bestimmung der Eigenraumbasen, d. h. einer Basis S_i von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ mit dem Gauß-Algorithmus für jedes i = 1, ..., r.
3. Schritt: Konstruktion einer ONB B_i aus S_i nach dem Gram-Schmidt-Verfahren für jedes i = 1, ..., r.
4. Schritt: Aus $B_1 \cup \cdots \cup B_r = \{p_1, \dots, p_n\}$ wird dann die orthogonale Matrix $P = (p_n \ \cdots \ p_n)$ gebildet, die A diagonalisiert, d. h. mit der $P^{-1}AP = P^T AP = D = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda'_n \end{pmatrix}$ gilt, wobei $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) = (\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{n_1\text{-mal}} \dots \underbrace{\lambda_r \dots \lambda_r}_{n_r\text{-mal}})$ ist.