Vorläufige und fortlaufende Kurzfassung von
"Elementary Linear Algebra" – *Howard Anton / Chris Rorres* – 8th E, 2000

# VI. Kapitel Euklidische Vektorräume

## 1. Reelle Vektorräume mit Skalarprodukt (Euklidische Vektorräume)

Zur Übertragung bzw. Verallgemeinerung der Begriffe **Länge**, **Abstand** und **Winkel** auf allgemeine $\mathbb{R}$-Vektorräume $V$ werden nun die im IV. Kapitel bewiesenen fundamentalen Eigenschaften des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$, d. h. von $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ , als Axiome an den Anfang gesetzt

durch die Def. Ein **inneres** oder **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum $V$ ist eine Abbildung, die jedem Paar von Vektoren $u$ und $v$ aus $V$ eine reelle Zahl $\langle u, v\rangle$ zuordnet, so dass für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und alle Skalare $k \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (Symmetrie)
ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ , $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ (Additivität)
iii) $\langle ku, v\rangle = \langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$ (Homogenität)
iv) $\langle v, v\rangle \geq 0$ (Positivität) , $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Nichtdegeneriertheit)

Kurz gesagt: Die Abbildung $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine positiv definite (iv) symmetrische (i) Bilinearform (ii, iii) auf $V$.

Von daher ist sofort nahe liegend die

Def. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$. Die **Norm** oder **Länge** eines Vektors $u$ aus $V$ wird definiert als

$$\|u\| := \sqrt{< u, u >} .$$

Der **Abstand** $d(u, v)$ zweier Vektoren (Punkte) $u$ und $v$ aus $V$ wird gemessen mit

$$d(u, v) := \|u - v\| .$$

Unter alleiniger Anwendung der oben definierten "Spielregeln" i) – iv) wurden bereits im IV. Kapitel die Aussagen der folgenden zwei Sätze bewiesen, die daher auch allgemein in einem euklidischen Vektorraum gelten.

**Satz VI.1** Seien $u$, $v$, und $w$ Elemente eines euklidischen Vektorraumes und $k$ ein Skalar. Dann gilt:

**i)** a) $\langle \mathbf{0}, v\rangle = \langle v, \mathbf{0}\rangle = 0$ b) $\langle u - v, w\rangle = \langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle$
c) $\langle u, v - w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, w\rangle$ .

**ii)** (***Cauchy-Schwarzsche Ungleichung***)

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| .$$

**iii)** a) $\|u\| \geq 0$ b) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$ c) $\|ku\| = |k|\|u\|$
d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung).

**iv)** a) $d(u, v) \geq 0$ b) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ c) $d(u, v) = d(v, u)$
d) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (Dreiecksungleichung).

Def. Zwei Vektoren $u$, $v$ aus einem euklidischen Vektorraum heißen **orthogonal** oder senkrecht zueinander, geschrieben $u \perp v$, wenn $\langle u, v\rangle = 0$ ist.

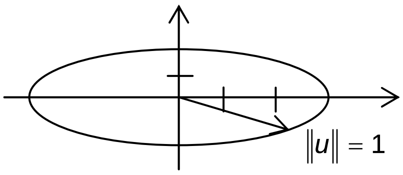
**Satz VI.2** (***Verallgemeinerter Satz des Pythagoras***)
Für orthogonale Vektoren $u$ und $v$ in einem euklidischen Vektorraum gilt

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

z. B. i) Gewichtetes Skalarprodukt mit $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^+ = \left]0, \infty\right[$ ; $u, v \in \mathbb{R}^n$ :

$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} w_i\, u_i\, v_i$ . Nachweis der Gültigkeit der Axiome i) – iv) in der Def. des Skalarprodukts zur Übung.

z. B. $V = \mathbb{R}^2$ , $\langle u\ v \rangle = \frac{1}{9} u_1 v_1 + \frac{1}{4} u_2 v_2$ , $\| u \| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 1 \iff \sqrt{\frac{1}{9} x^2 + \frac{1}{4} y^2} = 1$




<u>Einheitskreis $S^1$</u> bzgl. der induzierten Norm hat hier eine elliptische Gestalt.

ii) $p, q \in P_2$ $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , $q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

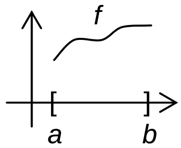
$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$

iii) Mit Sätzen aus der Analysis erhält man ein Skalarprodukt auf $C[a, b]$ durch

$f, g \in C[a, b]$ $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ $\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$

Damit hat man neben ii) ein weiteres Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-*VR* $P_n$ , d. h. der Menge der Polynome höchsten n-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$.

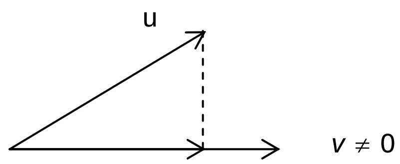
**NB**




<u>Bogenlänge</u> $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx \overset{\triangle}{\neq}$ <u>Norm</u> $\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Zur geometrischen Interpretation der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$|\langle u, v \rangle| \le \| u \| \| v \| \underset{\|v\| \neq 0}{\iff} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\| v \|} \le \| u \|$




$$\| \text{proj}_v\, u \| \underset{\otimes}{=} \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\| v \|^2} v \right\| = \left| \frac{\langle u, v \rangle}{\| v \|^2} \right| \| v \| = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\| v \|} \le \| u \|$$

$\otimes$ vgl. Orthogonalprojektion in IV. Kap. 1.

Nahe liegend ist also, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn $u, v$ linear abhängig sind; Beweis zur Übung.

Nun lässt sich wegen $-1 \le \frac{\langle u, v \rangle}{\| u \| \| v \|} \le 1$, wenn $u \neq 0$ und $v \neq 0$ ist, auch mit einem beliebigen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ein **Winkel** $\varphi$ definieren gemäß $\cos \varphi := \frac{\langle u, v \rangle}{\| u \| \| v \|}$ , $0 \le \varphi \le \pi$ .

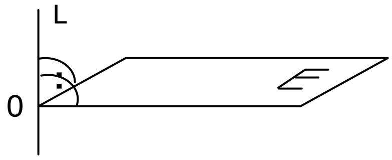
<u>Vereinbarung: Bis auf Weiteres bezeichnet $V$ einen rellen Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ , d. h. einen euklidischen Vektorraum.</u>

## <u>2. Orthogonalität</u>

<u>Def.</u> Für $u \in V$ wird mit $\{ u \}^{\perp} := \{ v \mid v \in V,\ \langle u, v \rangle = 0 \}$ die Menge aller zu $u$ orthogonalen Elemente aus $V$ bezeichnet, und allgemein heißt für $S \subseteq V$

$\underline{S^{\perp}} := \left\{ v \mid v \in V\ ,\ \bigwedge_{s \in S} \langle s, v \rangle = 0 \right\}$ <u>orthogonales Komplement von $S$</u>.

z. B. Im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle u, v\rangle = u \cdot v$ (IV. Kap.) ist
(Ebene durch Null)$^\perp$ = Gerade durch Null, (Gerade durch Null)$^\perp$ = Ebene durch Null.




$E^\perp = L$, $L^\perp = E$

**Satz VI.3** Für einen Unterraum $W \subseteq V$ gilt

i) $W^\perp$ ist Unterr. von $V$ ii) $W^\perp \cap W = \{\, 0 \,\}$

iii) $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ iv) $(W^\perp)^\perp = W$, wenn $W$ endlichdim. ist.

Bew.: i) $0 \in W^\perp$, da $\bigwedge_{w \in W} \langle w, 0\rangle = 0$

$u, v \in W^\perp \Rightarrow \bigwedge_{w \in W} \langle w, u+v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in W^\perp$

$k \in \mathbb{R},\ v \in W^\perp \Rightarrow \bigwedge_{w \in W} \langle w, kv\rangle = k\,\langle w, v\rangle = k0 = 0 \Rightarrow kv \in W^\perp$

ii) $w \in W,\ w \in W^\perp \Rightarrow \langle w, w\rangle = 0 \Rightarrow w = 0$

iii) $w \in W \Rightarrow \bigwedge_{v \in W^\perp} \langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle = 0 \Rightarrow w \in \left(W^\perp\right)^\perp$

iv) Übung (später)

**NB** Wegen $(W^\perp)^\perp = W$ für einen endlichdim. Unterraum $W \subseteq V$ sind $W$ und $W^\perp$ orthogonale Komplemente voneinander. Man sagt, <u>$W, W^\perp$</u> sind <u>orthogonale Komplemente in $V$</u>.

**Satz VI.4** Für $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle u, v\rangle = u \cdot v$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt

i) Nullr($A$) = (Zeilenr($A$))$^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$, d. h. Nullr($A$) und Zeilenr($A$) sind orthogonale Komplemente in $\mathbb{R}^n$.

ii) Nullr($A^T$) = (Spaltenr($A$))$^\perp \subseteq \mathbb{R}^m$, d. h. Nullr($A^T$) und Spaltenr($A$) sind orthogonale Komplemente in $\mathbb{R}^m$.

Bew.: i) Mit $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$ und $Au = \begin{pmatrix} u \cdot r_1 \\ \vdots \\ u \cdot r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ erhält man einerseits:

$$u \in \text{Nullr}(A) \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow u \cdot r_1 = u \cdot r_2 = \ldots = u \cdot r_m = 0 \Rightarrow u \cdot v = u \cdot \left(k_1 r_1 + k_2 r_2 + \ldots + k_m r_m\right)$$
$$= k_1(u \cdot r_1) + k_2(u \cdot r_2) + \ldots + k_m(u \cdot r_m) = k_1 0 + k_2 0 + \ldots k_m 0 = 0 \Rightarrow u \in \left(\text{Zeilenr}(A)\right)^\perp,$$

andererseits:

$$u \in \left(\text{Zeilenr}(A)\right)^\perp \Rightarrow u \cdot r_1 = u \cdot r_2 = \ldots = u \cdot r_m = 0 \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow u \in \text{Nullr}(A)$$

ii) $\text{Nullr}(A^T) \underset{\text{i)}}{=} \left(\text{Zeilenr}(A^T)\right)^\perp = \left(\text{Spaltenr}(A)\right)^\perp$

Wegen $\{\, 0 \,\}^\perp = \mathbb{R}^n$ für $0 \in \mathbb{R}^n$ hat man für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die

**Folgerung VI.5** $\text{Lös}(A \mid 0) = \{\, 0 \,\} \Leftrightarrow \left(\text{Zeilenr}(A)\right)^\perp = \{\, 0 \,\} \Leftrightarrow \left(\text{Nullr}(A)\right)^\perp = \mathbb{R}^n$

## 3. Orthonormalbasen, Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, QR-Zerlegung

Def. Von einer (Teil-)Menge $S \subseteq V$ wird gesagt,

i) $S$ ist orthogonal $:\Leftrightarrow \bigwedge_{u,v\in S}\left(u \neq v \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0\right) \;\Leftrightarrow:$ $S$ ist Orthogonalsystem (OGS)

ii) $S$ ist orthonormal $:\Leftrightarrow$ $S$ orthogonal, $\bigwedge_{u\in S}\|u\| = 1 \;\Leftrightarrow:$ $S$ ist Orthonormal-system (ONS).

d. h. $\langle u,v\rangle = \begin{cases} 0 & u \neq v \\ 1 & u = v \end{cases}$

**NB** i) Wegen $\left\|\dfrac{v}{\|v\|}\right\| = 1$ lässt sich jedes OGS $S$ mit $0 \notin S$ in ein ONS verwandeln (Normalisierung, Normierung).

ii) Der obigen Definition entsprechend spricht man von Orthogonal- bzw. Orthonormalbasen.

**Satz VI.6** Jede orthogonale Menge $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ mit $0 \notin S$ ist linear unabhängig.

Bew.: $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0 \Rightarrow 0 = \langle 0, v_1\rangle = \langle k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n\,,\, v_1\rangle$
$= k_1\langle v_1, v_1\rangle + k_2\langle v_2, v_1\rangle + \dots + k_n\langle v_n, v_1\rangle = k_1\langle v_1, v_1\rangle \underset{v_1\neq 0}{\Rightarrow} k_1 = 0$, analog folgt $k_2, \dots, k_n = 0$

Wie der Koordinatenvektor $(u)_B \in \mathbb{R}^n$ eines Vektors $u \in V$ bzgl. einer Orthonormalbasis (ONB) $B = \{q_1, \dots, q_n\}$ berechnet wird, sagt der

**Satz VI.7** Sei $B = \{q_1, \dots, q_n\}$ eine ONB von $V$. Dann gilt

$$\bigwedge_{u\in V} u = \langle u,q_1\rangle q_1 + \langle u,q_2\rangle q_2 + \dots + \langle u,q_n\rangle q_n, \text{ d. h. } (u)_B = \left(\langle u,q_1\rangle, \langle u,q_2\rangle, \dots, \langle u,q_n\rangle\right).$$

Koordinatenvektor von $u$ bzgl. $B$

Bew.: $u = k_1q_1 + k_2q_2 + \dots + k_nq_n$ ;

$\langle u, q_i\rangle = \langle k_1q_1 + k_2q_2 + \dots k_nq_n\,,\, q_i\rangle = k_1\langle q_1, q_i\rangle + k_2\langle q_2, q_i\rangle + \dots + k_n\langle q_n, q_i\rangle$
$= k_i\langle q_i, q_i\rangle = k_i$, da $\langle q_j, q_i\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle q_i, q_i\rangle = \|q_i\|^2 = 1$ □

**NB** Die Menge der Einheitsvektoren $S = \{e_1, \dots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$ ist eine ONB des $\mathbb{R}^n$ mit Standard-skalarprodukt, und es gilt für $u \in \mathbb{R}^n$ $u = (u_1, \dots, u_n) = (u)_S$ .

z. B. Mit den Standardskalarprodukten $\langle u,v\rangle = u\cdot v$ erhält man für $(1, 1, 1) = u$ und $B = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\} = \{q_1, q_2, q_3\}$, da $B$ eine ONB ist, die Darstellung

$$u = \langle u,q_1\rangle q_1 + \langle u,q_2\rangle q_2 + \langle u,q_3\rangle q_3\,, \text{ d. h. } \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\; (u)_B = \left(1, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

**NB** Bzgl. einer Orthogonalbasis (OGB) $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $V$ hat jedes $u \in V$ die Darstellung

$$u = \frac{\langle u,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 + \frac{\langle u,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 + \dots + \frac{\langle u,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}v_n\,, \quad \text{da } \left\langle u, \frac{v_i}{\|v_i\|}\right\rangle\frac{v_i}{\|v_i\|} = \frac{\langle u,v_i\rangle}{\|v_i\|^2}v_i\,.$$

Dass bzgl. einer ONB die bekannten Formeln aus Kapitel IV.1 gelten, besagt

**Satz VI.8** Sei $B$ eine ONB eines $n$-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V$. Dann gilt für $u, v \in V$ mit $(u)_B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(v)_B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

i) $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$

ii) $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}$

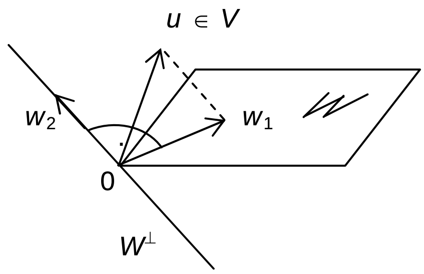
iii) $d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$

Bew.: i) $\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_i q_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} v_j q_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \langle q_i \, , \, q_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ ; ii), iii) folgt aus i)

z. B. $(u)_S = (1, 1, 1)$ $\quad \|u\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\quad$ S : Standardbasis

$(u)_B = \left(1, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ $\quad \|u\| = \sqrt{1 + \frac{49}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{3}$. $\quad$ B : ONB aus obigem Beispiel

Und nun zu Unterräumen $W \subseteq V$, ihren orthogonalen Komplementen $W^\perp \subseteq V$ und der Zerlegung der Vektoren $v \in V$ in orthogonale Komponenten $u = w_1 + w_2$, $w_1 \in W$, $w_2 \in W^\perp$.




$W$ ist Unterraum von $V$

$u = w_1 + w_2$, $\quad w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$

**Satz VI.9** und Def. Sei $\{q_1, \ldots, q_r\}$ eine ONB eines Unterraums $W$ von $V$. Dann lässt sich jedes $u \in V$ eindeutig zerlegen in

$$u = \sum_{i=1}^{r} \langle u, q_i \rangle q_i + w_2 = w_1 + w_2 \, ; \quad w_1 \in W, \quad w_2 \in W^\perp$$

$$=: \operatorname{proj}_W u \quad + \operatorname{proj}_{W^\perp} u$$

$$=: \frac{\text{Orthogonalprojektion}}{\text{von } u \text{ auf } W} + \begin{array}{l}\text{zu W orthogonale}\\ \text{Komponente von } u\end{array}$$

Bew.: Da nach Vor. $\operatorname{span}\{q_1, \ldots, q_r\} = W$ ist, gilt $w_1 = \sum_{i=1}^{r} \langle u, q_i \rangle q_i \in W$.

$w_2 = u - w_1 \in W^\perp$, da für jedes $w \in W$ $\langle w, w_2 \rangle = \langle w, u - w_1 \rangle = \langle w, u \rangle - \langle w, w_1 \rangle = 0$ ist;
denn mit der ONB $\{q_1, \ldots, q_r\}$ von $W$ hat ein beliebiges $w \in W$ nach Satz VI.7 die Darstellung $w = \sum_{j=1}^{r} \langle w, q_j \rangle q_j$, und es folgt mit $l_i := \langle w, q_i \rangle$ und $k_i := \langle u, q_i \rangle$

$\langle w, w_1 \rangle = \sum_{i=1}^{r} l_i k_i$ nach Satz VI.8, und $\langle w, u \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{r} l_j q_j \, , u \right\rangle = \sum_{j=1}^{r} l_j \langle q_j \, , u \rangle = \sum_{j=1}^{r} l_j k_j$.

Die Zerlegung ist eindeutig, denn für
$u = w_1 + w_2$ und $u = w'_1 + w'_2$ mit $w_1, w'_1 \in W$ und $w_2, w'_2 \in W^\perp$ folgt
$w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 \in W, W^\perp$, da nach Vor. $W$ und nach Satz VI.3 auch $W^\perp$ Unterraum ist.
Wegen $W \cap W^\perp = \{0\}$, Satz VI.3, folgt $w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 = 0$, d. h. die Behauptung. □

**NB** Liegt für den Unterraum $W$ eine OGB $\{v_1, \ldots, v_r\}$ vor, folgt mit $q_i = \dfrac{1}{\|v_i\|} v_i$ :

$$u = w_1 + w_2 \ , \quad w_1 \perp w_2 \ ,$$

$$\underline{w_1 = \operatorname{proj}_W u} = \sum_{i=1}^{r} \left\langle u, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle \frac{v_i}{\|v_i\|} = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \ldots + \frac{\langle u, v_r \rangle}{\|v_r\|^2} v_r \quad \underline{\in W} \ ;$$

$$w_2 = \underline{\operatorname{proj}_{W^\perp} u = u - \operatorname{proj}_W u \quad \in W^\perp} \ .$$

**Satz VI.10 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren**

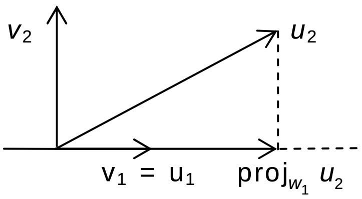
Sei $\{u_1, \ldots, u_r\} = S$ eine linear unabhängige Teilmenge eines eukl. Vektorr. $V$.
Dann erhält man eine Orthogonalbasis von $W = \operatorname{span}(S)$ durch die Vorschrift

$$v_1 := u_1$$
$$v_2 := u_2 - \operatorname{proj}_{W_1} u_2 \in W_1^\perp \ , \ \text{ mit } W_1 := \operatorname{span}\{v_1\} = \operatorname{span}\{u_1\}$$
$$v_3 := u_3 - \operatorname{proj}_{W_2} u_3 \in W_2^\perp \ , \ \text{ mit } W_2 := \operatorname{span}\{v_1 \, , \, v_2\} = \operatorname{span}\{u_1 \, , \, u_2\}$$
$$v_4 := u_4 - \operatorname{proj}_{W_3} u_4 \in W_3^\perp \ , \ \text{ mit } W_3 := \operatorname{span}\{v_1 \, , \, v_2 \, , \, v_3\} = \operatorname{span}\{u_1 \, , \, u_2 \, , \, u_3\}$$

usw. bis $v_r$ ; also wird folgendermaßen gerechnet:

$$v_1 := u_1 \ , \quad v_2 := u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \ , \quad v_3 := u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \ ,$$

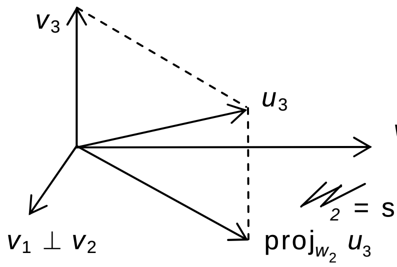
$$v_4 := u_4 - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 \qquad \text{usw. bis } v_r .$$




$v_2 = u_2 - \operatorname{proj}_{W_1} u_2 \in W_1^\perp$

$W_1 = \operatorname{span}\{v_1\}$

$v_3 = u_3 - \operatorname{proj}_{W_2} u_3 \in W_2^\perp$




$W_2 = \operatorname{span}\{v_1 \, , \, v_2\}$

Bew.: $v_1 \neq 0$, da $\{u_1, \ldots, u_r\}$ lin. unabhängig nach Vor. Mit Satz VI.9 und nach Konstruktion folgt $v_2 \neq 0$, da auch $\{u_1, u_2\}$ lin. unabhängig, und $v_3 \neq 0$, da auch $\{u_1, u_2, u_3\}$ lin. unabhängig, usw. Es ist ferner $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$, da $v_i \in \left(\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}\right)^\perp$ . □

**NB** Für jedes $i$, $1 \leq i \leq r$, ist also $\{v_1, \ldots v_i\}$ eine orthogonale Menge, die nach Satz VI.6 linear unabhängig ist und daher eine Basis von $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_i\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_i\}$ darstellt.

| | |
|---|---|
| **NB** | Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum $V \neq \{0\}$ besitzt eine ONB. |

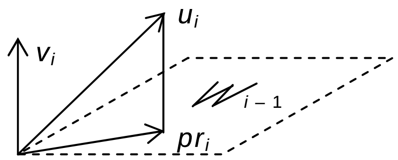
**Satz VI.11** **QR-Zerlegung**

Eine Matrix $A = (u_1 \ \cdots \ u_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit lin. unabh. Spalten kann faktorisiert werden in

$$(u_1 \ \cdots \ u_n) = \underline{A = QR} = (q_1 \ \cdots \ q_n)R\,,$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ orthonormale Spalten hat und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksm. ist.

Bew.: Als Spalten von $Q$ werden die nach Satz VI.10 (Gram-Schm.-Verf.) aus $u_1 \ \cdots \ u_n$ konstruierten Vektoren $q_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$ gesetzt.




$$u_1 = v_1 \ ; \quad v_i = u_i - pr_i = \in W_{i-1}^{\perp} \quad \text{für } i \ge 2$$

$$u_i \notin W_{i-1} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{i-1}\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$$

$$pr_i = \operatorname{proj}_{W_{i-1}} u_i \in W_{i-1}$$

Da $\{q_1, \ldots, q_n\}$ ONB von $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ ist, hat jedes $u_j$, $1 \le j \le n$, nach Satz VI.7 die Darstellung

$$\underline{\underline{u_j}} = \sum_{i=1}^{n} \langle u_j , q_i \rangle q_i \underset{\text{i)}}{=} (q_1 \ \cdots \ q_n) \begin{pmatrix} \langle u_j , q_1 \rangle \\ \langle u_j , q_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_j , q_n \rangle \end{pmatrix} \underset{\text{ii)}}{=} \underline{\underline{Q \begin{pmatrix} \langle q_1 , u_j \rangle \\ \vdots \\ \langle q_j , u_j \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

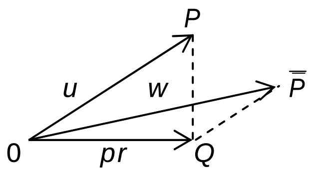
i) vgl. Kap. I.3 ; ii) wegen $q_i \in W_{i-1}^{\perp}$ ist $\langle q_i , u_j \rangle = 0$ für $i > j$.

$$\text{Also } \ QR = (q_1 \ \cdots \ q_n) \begin{pmatrix} \langle q_1 , u_1 \rangle & \langle q_1 , u_2 \rangle & \cdots & \langle q_1 , u_n \rangle \\ 0 & \langle q_2 , u_2 \rangle & \cdots & \langle q_2 , u_n \rangle \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \langle q_n , u_n \rangle \end{pmatrix} = (u_1 \ \cdots \ u_n) = A\,.$$

Die Invertierbarkeit der Dreiecksmatrix $R$ folgt aus $0 = \langle v_i , pr_i \rangle = \langle v_i , u_i - v_i \rangle = \langle v_i , u_i \rangle - \|v_i\|^2$,

$$\text{also } \ 0 \ne \underline{\|v_i\|} = \frac{1}{\|v_i\|} \langle v_i , u_i \rangle = \underline{\langle q_i , u_i \rangle}\,.$$

## 4. Näherungslösungen




$$u = \overline{0P} \in V\,, \quad pr = \overline{0Q} = \operatorname{proj}_W u \in W\,, \quad w = \overline{0\overline{P}} \in W$$

$$\overline{QP} = (u - pr) \perp (w - pr) = \overline{Q\overline{P}} \quad \text{nach Satz VI.9}$$

Dass die in Satz VI.9 definierte Orthogonalprojektion $\operatorname{proj}_W u$ eines Vektors $u \in V$ auf einem Unterraum W der üblichen Vorstellung entspricht, besagt

**Satz VI.12** Für einen Unterraum $W$ eines eukl. Vektorr. $V$ gilt:

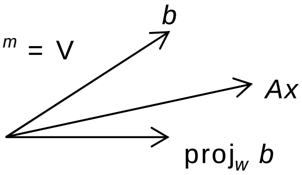
$$\bigwedge_{u \in V} \bigwedge_{w \in W} \|u - \operatorname{proj}_W u\| \le \|u - w\|\,,$$

d. h., von allen $w \in W$ bzw. Punkten $\overline{P}$ in $W$ hat $\operatorname{proj}_W u \in W$ bzw. der Fußpunkt $Q$ in $W$ den <u>kleinsten Abstand</u> zu $u \in V$ bzw. zum Punkt $P$ in $V$.

Bew.: $\| u - w \|^2 = \| u - pr + (pr - w) \|^2 = \| u - pr \|^2 + \| pr - w \|^2 \geq \| u - pr \|^2$
aufgrund von Satz VI.2.

Satz VI.12 liefert die Argumente dafür, ein unlösbares LGS $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, d. h. (nach Satz V.22) $b \notin \text{Spaltenr}(A) =: W$, durch das <u>lösbare LGS $Ax = \text{proj}_W b$</u> zu ersetzen, um mindestens eine gute <u>Näherungslösung</u> $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zu erhalten.
Mit einer Lösung $x_0$ von $Ax = \text{proj}_W b$ wird nämlich der als "Fehler" betrachtete Ausdruck $\| b - Ax \|$ am kleinsten. (Siehe dazu Kap. IX.3: Methode der kleinsten Quadrate.)

$\mathbb{R}^m$ = V




$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \in \text{Spaltenr}(A) = W \subseteq \mathbb{R}^m, \quad b \in \mathbb{R}^m \end{array}\right\}$$

Mit dem <u>Normalsystem $A^T Ax = A^T b$ zu $Ax = b$</u> lassen sich alle derartigen Näherungslösungen bestimmen aufgrund von

**<u>Satz VI.13</u>** Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $W = \text{Spaltenr}(A)$, $\mathbb{R}^m$ mit Standardskalarpr.
dann gilt: $Ax_0 = \text{proj}_W b \quad \Leftrightarrow \quad A^T A x_0 = A^T b$

Bew.: Argumentiert wird mit
i) $Ax_0 - \text{proj}_W b \in W$, $W \cap W^\perp = \{0\}$ ii) $b - \text{proj}_W b \in W^\perp = \text{Nullr}(A^T)$

"$\Rightarrow$": $A^T b - A^T A x_0 \underset{\text{Vor.}}{=} A^T b - A^T \text{proj}_W b = A^T (b - \text{proj}_W b) \underset{\text{ii)}}{=} 0$

"$\Leftarrow$": $A^T (Ax_0 - \text{proj}_W b) = A^T A x_0 - A^T \text{proj}_W b \underset{\text{Vor.}}{=} A^T b - A^T \text{proj}_W b = A^T (b - \text{proj}_W b) \underset{\text{ii)}}{=} 0$

$\underset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \quad Ax_0 - \text{proj}_W b \in W^\perp \quad \underset{\text{i)}}{\Rightarrow} \quad Ax_0 - \text{proj}_W b = 0$.

**<u>Satz VI.14</u>** Für $A = (u_1 \ \cdots \ u_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:
$\{u_1, \ldots, u_n\}$ lin. unabh. $\Leftrightarrow$ $A^T A$ invertierbar.

Bew.: Mit $W :=$ Spaltenr(A) sind die Argumente
i) $\text{Nullr}(A^T) = W^\perp$ ii) $W^\perp \cap W = \{0\}$
iii) $\text{Lös}(A \mid 0) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \{u_1, \ldots, u_n\}$ lin. unabh.
iv) $B = A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar $\quad \Leftrightarrow \quad \text{Lös}(B \mid 0) = \{0\}$

"$\Rightarrow$": $A^T A x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax_0 \in \text{Nullr}(A^T) \underset{\text{i)}}{=} W^\perp \quad \underset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \quad Ax_0 = 0 \underset{\text{Vor., iii)}}{\Rightarrow} x_0 = 0$.
Also ist mit iv) $A^T A$ invertierbar.

"$\Leftarrow$": $Ax_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^T A x_0 = 0 \underset{\text{Vor.iv)}}{\Rightarrow} x_0 = 0$. Also ist mit iii) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ lin. unabh.

**NB** Hat $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lin. unabh. Spalten, so ist $Ax = \text{proj}_W b$ mit $W = \text{Spaltenr}(A)$ bzw. (nach Satz VI.13) $A^T Ax = A^T b$ <u>eindeutig</u> lösbar
mit i) $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$; in diesem Fall hat man ii) $\text{proj}_W b = A(A^T A)^{-1} A^T b$.

## 5. Orthogonale Matrizen, Basiswechsel

### Orthogonale Matrizen

Def. Man nennt eine quadratische Matrix $A$ orthogonal $:\Leftrightarrow\ A^T = A^{-1}$

z. B. $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D_{-\varphi} = D_\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (s. Kap. IV.2, Appendix 1)

Drehung Drehspiegelung

**NB** Jede orthogon. 2 x 2-Matrix lässt sich als $D_\varphi$ oder $S_\varphi$ darstellen.
Bew.: Rechenübung

**Satz VI.15** und Def. Mit der Matrizenmultiplikation (bzw. dem Matrixprodukt) bildet die Menge der orthogon. Matrizen $O(n) := \left\{ A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ,\quad A^T = A^{-1} \right\}$ eine Gruppe, orthogonale Gruppe genannt, d. h., es sind die vier Gruppenaxiome erfüllt.

i) $\bigwedge_{A,B\in O(n)} AB \in O(n)$ ii) $\bigwedge_{A,B,C\in O(n)} A(BC) = (AB)C$

iii) $\bigvee_{\mathbf{1}\in O(n)} \bigwedge_{A\in O(n)} A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$ iv) $\bigwedge_{A\in O(n)} \bigvee_{A^{-1}\in O(n)} AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$

Bew.: Übung

**NB** Für $A \in O(n)$ ist $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$ und es ist die Menge $SO(n) = \left\{ A \mid A \in O(n),\ \det(A) = 1 \right\}$ eine Gruppe (Untergruppe von $O(n)$ ), spezielle orthogonale Gruppe genannt.
Bew.: Übung

**Satz VI.16** Mit dem Standardskalarprodukt $x\cdot y = x^T y$ gilt für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

i) A orthogonal $\Leftrightarrow$ ii) Spalten von $A$ bilden ONS $\Leftrightarrow$ iii) $A^T A = \mathbf{1}$

$\Leftrightarrow$ iv) Zeilen von $A$ bilden ONS $\Leftrightarrow$ v) $AA^T = \mathbf{1}$

$\Leftrightarrow$ vi) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^n} Ax\cdot Ax = x\cdot x$ $\Leftrightarrow$ vii) $\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}^n} Ax\cdot Ay = x\cdot y$

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ v) : $A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^T A = \mathbf{1} \Leftrightarrow AA^T = \mathbf{1}$ (s. Kap. I).
Werden mit $r_i$ die Zeilen und mit $c_j$ die Spalten von $A$ bezeichnet, d. h. $A = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}^T$, so zeigt sich

ii) $\Leftrightarrow$ iii) : wegen $\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} = A^T A$,

iv) $\Leftrightarrow$ v) : wegen $\begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix} = AA^T$.

iii) $\Leftrightarrow$ vi) $\Leftrightarrow$ vii) : iii) $\Rightarrow$ vi) : $Ax\cdot Ax = x^T A^T Ax \underset{\text{Vor.}}{=} x^T x = x\cdot x$,

vi) $\Rightarrow$ vii) : Mit $4\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2$ (Übung) ist

$$4\left(Ax\cdot Ay\right) = \left(Ax+Ay\right)^2 - \left(Ax-Ay\right)^2 = \left(A(x+y)\right)^2 - \left(A(x-y)\right)^2$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4(x\cdot y),$$

vii) $\Rightarrow$ iii) Mit den Einheitsvektoren $e_i$, $e_j$ ist $e_i\cdot e_j \underset{\text{Vor.}}{=} Ae_i\cdot Ae_j = c_i\cdot c_j$ das Element von $A^T A$ in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte. □

## Basiswechsel

Ist $\dim V = 2$, so hat bezüglich zweier Basen $B = \{v_1, v_2\}$, $B' = \{v'_1, v'_2\} \subseteq V$ ein $u \in V$ die Darstellungen

$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 \quad \Leftrightarrow \quad (u)_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, $u = k'_1 v'_1 + k'_2 v'_2 \quad \Leftrightarrow \quad (u)_{B'} = \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix}$.

$v'_1$, $v'_2 \in B'$ werden nun bzgl. der Basis $B$ dargestellt, d. h.

$v'_1 = av_1 + bv_2 \quad \Leftrightarrow \quad (v'_1)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v'_2 = cv_1 + dv_2 \quad \Leftrightarrow \quad (v'_2)_B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, und man hat daher:

$$u = k'_1(av_1 + bv_2) + k'_2(cv_1 + dv_2) = (ak'_1 + ck'_2)v_1 + (bk'_1 + dk'_2)v_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (u)_B = \begin{pmatrix} ak'_1 + ck'_2 \\ bk'_1 + dk'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} = P(u)_{B'} \quad \text{mit } P = \left((v'_1)_B \; (v'_2)_B\right).$$

Analoge Rechnungen führen zu

**Satz VI.17** Seien $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ Basen eines Vektorraums $V$. Dann gilt für die Koordinatenvektoren $(u)_B$, $(u)_{B'}$ von $u \in V$

$$\underline{\underline{(u)_B = P(u)_{B'}}} \quad \text{mit der}$$

$$\underline{\text{Übergangsmatrix}} \quad \underline{\underline{P = \left((v'_1)_B \; \cdots \; (v'_n)_B\right)}} \quad \underline{\text{von } B' \text{ nach } B}$$

**Satz VI.18** Für die Übergangsmatrix $P$ von $B'$ nach $B$ gilt
i) P ist invertierbar ii) $P^{-1}$ ist Übergangsmatrix von $B$ nach $B'$.

Bew.: Sei $Q$ die Übergangsmatrix von $B$ nach $B'$, dann ist $(u)_{B'} = Q(u)_B$ für alle $u \in V$.
Für $v_i \in B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist $(v_i)_B = e_i$, und daher $e_i = (v_i)_B = P(v_i)_{B'} = PQ(v_i)_B = PQe_i$,
d. h. $e_i = (PQ)e_i = i$-te Spalte von $PQ$. Also ist $PQ = \mathbf{1}$ und somit $P$ invertierbar mit $Q = P^{-1}$.

**Satz VI.19** Sind $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ ONB'n, dann ist die Übergangsmatrix $P$ orthogonal, d. h. $P^T = P^{-1}$.

Bew.: Es wird die aus Satz VI.16 äquivalente Aussage $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}^n} Px \cdot Px = x \cdot x$ bewiesen.

Sei also $x \in \mathbb{R}^n$, und $u := \sum_{i=1}^{n} x_i v'_i \quad \Leftrightarrow \quad (u)_{B'} = x$; dann ist $u$ auch darstellbar als

$u = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \quad \Leftrightarrow \quad (u)_B = k \in \mathbb{R}^n$. Da nach Vorr. $B$, $B'$ ONB'n sind, ist nach Satz VI.8

$\|u\| = \sqrt{x \cdot x}$ und $\|u\| = \sqrt{k \cdot k}$, und es folgt $x \cdot x = k \cdot k = (u)_B \cdot (u)_B = P(u)_{B'} \cdot P(u)_{B'} = Px \cdot Px$. □