

Vorläufige deutsche Kurzfassung (Tafelbild) von

"Elementary Linear Algebra"

Howard Anton / Chris Rorres – 8th E, 2000

Kapitel 1 – 5

Dipl.-Math. O. Hamborg
TFH Berlin – Fachbereich II
WS 2006/07 - Lineare Algebra 1

I. Kapitel – Lineare Gleichungssystem und Matrizen	
1. Lineare Gleichungssysteme	3
2. Gauß-Elimination	3
3. Matrizen	6
4. Rechenregeln für Matrizen	8
5. Elementarmatrizen	10
6. Mehr zu LGS'en und invertierbaren Matrizen	12
7. Spezielle quadratische Matrizen	13
II. Kapitel - Determinanten	
1. Die Determinantenfunktion	14
2. Zur Berechnung der Determinanten	16
3. Weitere Eigenschaften der det-Funktion	18
4. Cofaktorentwicklung, Cramersche Regel	20
III. Kapitel ist enthalten im	
IV. Kapitel – Der Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$	
1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$	23
2. Lineare Transformation	30
V. Kapitel – Allgemeine Vektorräume	
1. Vektorräume	33
2. Unterräume	34
3. Lineare Unabhängigkeit	36
– Die Wronski Determinante	37
4. Basis, Dimension	37
5. Zeilen-, Spalten-, Nullraum	40
6. Rang und Defekt	43
Wiederholung und Zusammenfassung von Kapitel I bis V	45
Appendix I - Spiegelung in $\mathbb{R}^3$	46
Appendix II - Determinantengleichungen für Kurven und Flächen	47
1. Extrablatt – Die Σ -Notation; Literaturhinweise	49
2. Extrablatt – The Reduced Echelon Form ... : A Simple Proof	51
3. Extrablatt – Rechenregeln für Matrizen	52
4. Extrablatt – Zeilen-, Spalten-, Nullraum	54
5. Ad-hoc-Ergänzung (zum V. Kapitel)	56
01. Übungsblatt – 09.10.2006	57
02. Übungsblatt – 16.10.2006	59
03. Übungsblatt – 30.10.2006	61
04. Übungsblatt – 06.11.2006	62
05. Übungsblatt – 13.11.2006	64
06. Übungsblatt – 20.11.2006	65
07. Übungsblatt – 05.12.2006	66
08. Übungsblatt – 11.12.2006	67
09. Übungsblatt – 18.12.2006	69
10. Übungsblatt – 02.01.2007	70
11. Übungsblatt – 15.01.2007	72
12. Übungsblatt – 22.01.2007	74

I. Kapitel – Lineare Gleichungssystem und Matrizen

1. Lineare Gleichungssysteme (grundlegende Begriffe)

Jede Gerade in der Ebene und jede Ebene im Anschauungsraum kann beschrieben werden durch

$$a_1x + a_2y = b \quad \text{bzw.} \quad a_1x + a_2y + a_3z = b \\ (\text{siehe III. Kapitel}).$$

Ein Ausdruck der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$
 heißt lineare Gleichung mit n Unbekannten (Variablen).
 Also: $3x_1^2 + x_1x_2 = 0$, $\ln x + \sin y + z = \pi$ sind keine lin. Gl'n.

Eine Folge $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}$, auch als n -Tupel $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ oder Spalte $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ geschrieben,

heißt Lösung einer LG, wenn sie die LG erfüllt, d. h. $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$ gilt.

Die Menge (Gesamtheit) aller Lösungen heißt allgemeine Lösung der LG =: $\text{Lös}(LG)$.

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten ist ein Ausdruck der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} ; \quad \begin{array}{l} a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \\ i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array}$$

Eine Folge $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ heißt Lösung des LGS, wenn sie Lösung aller m Gleichungen ist.
 Entsprechend ist die allgemeine Lösung des LGS = $\text{Lös}(\text{LGS})$ definiert.

2. Gauß-Elimination (DIE Lösungsmethode eines LGS:)

z. B.
$$\begin{array}{rrcr} & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & -1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} =: (A | b)$$

LGS $\Leftrightarrow$ erweiterte Matrix $(A|b)$

Äquivalente Umformungen des LGS gemäß

$$(A | b) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = (A' | b') \quad \text{durch drei elementare Zeilenumformungen:$$

ZEILEN
STUFEN
FORM

- | | | |
|---|--|--|
| i) $z_i \rightarrow cz_i, c \neq 0$
Multiplikation
einer Zeile mit
$0 \neq c \in \mathbb{R}$ | ii) $\begin{matrix} z_i & \rightarrow & z_{i+k} \\ z_{i+k} & \rightarrow & z_i \end{matrix}$
Vertauschen
zweier Zeilen | iii) $z_i \rightarrow z_i + cz_{i \pm k} \quad k > 0$
Addition eines
Vielfachen einer Zeile zu einer and |
|---|--|--|

NB Was kann man mit der elementaren Umformung iii) anrichten, wenn $k = 0$ erlaubt wäre?
 (nota bene; Die Vertauschung ii) ist insofern nicht elementar, als sie in fünf Schritten mit
 übrigens) i) und iii) erreicht werden kann (Übung).

$$\begin{aligned} \text{z. B. } (A|b) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_1 \rightarrow z_3 \\ z_3 \rightarrow z_1}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_1 \rightarrow 2z_1 \\ z_2 \rightarrow 3z_2}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -10 & -2 \\ 12 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{z_2 \rightarrow z_2 + (-1)z_1 = z_2 - z_1}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_2 \rightarrow z_3 \\ z_3 \rightarrow z_2}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = (A'|b') \end{aligned}$$

Zeilenstufenform

Zwei Möglichkeiten, weiterzumachen:

a) Rück(wärts)substitution

$$\begin{aligned} \text{Lös}(A|b) &= \text{Lös}(A'|b') = \{(9, -10, 5)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \\ z_3' &\Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = 5 \\ z_2' &\Rightarrow 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 = -10 \\ z_1' &\Rightarrow 12x_1 + 6x_2 - 10x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{12}(-2 - 6x_2 + 10x_3) \\ &= \frac{1}{12}(-2 + 60 + 50) = 9 \end{aligned}$$

Satz I.1

b) Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{aligned} (A'|b') &= \begin{pmatrix} 12 & 6 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_2 \rightarrow z_2 - 2z_3 \\ z_1 \rightarrow z_1 + 10z_3}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{z_1 \rightarrow z_1 - 6z_2}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 108 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_1 \rightarrow \frac{1}{12}z_1}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 & = 9 \\ x_2 & = -10 \\ x_3 & = 5 \end{matrix} \end{aligned}$$

Zur reduzierten
Zeilenstufenform später.

$$\text{z. B. } (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_2 \rightarrow z_2 - z_1 \\ z_3 \rightarrow 2z_3 - 3z_1}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 13 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_3 \rightarrow z_3 - \frac{13}{4}z_2}]{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

$z_3' \Rightarrow 0x_1 + 0x_2 = -\frac{7}{4}$ ist für kein $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt, also keine Lösung, d. h. $\text{Lös}(A|b) = \{ \} = \emptyset$.

$$\text{z. B. } (A|b) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Nullzeilen
eine freie Variable $x_2 = t \in \mathbb{R}$

$z_3' = z_2' \Rightarrow 0x_2 = 0$ ist für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt, $z_1' \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}$

$$\text{Lös}(A|b) = \{(3 + 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Da elementare Z-Umf. durch ebensolche wieder rückgängig gemacht werden können, ändern sie die Lösungsmenge nicht, d. h.

Satz I.1 Für $(A|b) \xrightarrow{\text{elem. Z-Umf.}} (A'|b')$ ist $\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(A'|b')$.

Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 0 & ? & 0 & ? & \dots & 0 & ? \\ & 1 & ? & 0 & ? & \dots & 0 & ? \\ & & 1 & ? & \dots & 0 & ? \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & & & 0 & ? \\ & & & & & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Alle Nullzeilen stehen unten und zusammen.

Jede **Zeile**, die nicht nur Nullen enthält, beginnt mit einer führenden Eins.

Die führenden Einsen verlaufen von links oben in der ersten Zeile nach rechts unten.

Jede **Spalte** mit einer führenden Eins enthält nur noch Nullen.

Satz 1.2a Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ (s. Abschnitt 3, Matrizen) kann auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden (s. *Literatur*).

Eine Matrix kann durch elem. Z-Umf. auf verschiedene Zeilenstufenformen gebracht werden, aber:

Satz 1.2b Die reduzierte Zeilenstufenform ist eindeutig.

Beweis: *Thomas Yuster*: "The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof". *Mathematics Magazine*, 57(1984)2, S. 93-94. (2. Extrablatt v. 10.10.2006)

Ein LGS $(A|b)$ heißt

homogen : $\Leftrightarrow b_1 = 0 \wedge b_2 = 0 \wedge \dots \wedge b_m = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq j \leq m} b_j = 0;$

$\wedge$: und

$\bigwedge$: für alle ... gilt ...

d. h.
$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow (A|0),$$

andernfalls inhomogen,

d. h.
$$b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0 \vee \dots \vee b_m \neq 0 \Leftrightarrow \bigvee_{1 \leq j \leq m} b_j \neq 0;$$

$\vee$: oder

$\bigvee$: es gibt (mindestens) ein ..., für das gilt ...

Satz 1.3 Ein homog. LGS hat

- stets die triviale Lösung $s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0$.
- unendlich viele Lösungen, insbesondere nicht nur die triviale Lösung, wenn es mehr Variablen als Gleichungen hat, d. h. $m < n$ ist.

Bew.: i) klar ($s_j = 0$ einsetzen)

ii) Die red. Z-StF hat r , $r \leq m < n$, nicht verschwindende Zeilen, d. h. $m - r$ Nullzeilen, und entspricht

$$\begin{array}{rcl} \dots x_{j_1} & + \Sigma_1() & = 0 \\ \dots x_{j_2} & + \Sigma_2() & = 0 \\ & \vdots & \\ \dots x_{j_r} & + \Sigma_r() & = 0 \end{array}$$

Die führende Variable x_{j_i} entspricht der führenden 1 in der i -ten Zeile der red. Z-StF.

r führende Variablen ; $0 < n - r$ freie Variablen liefern das "Unendliche".

NB Später rechnen wir auch in endlichen Zahlbereichen (modulare Arithmetik, endliche Körper), was natürlich die Endlichkeit von $\text{Lös}(A|0)$ impliziert.

3. Matrizen

Zunächst zugrunde gelegte Zahlbereiche:

entweder $K = \mathbb{R}$ (eelle) oder $K = \mathbb{Q}$ (uotienten ganzer Zahlen).

Def. einer m -zeiligen und n -spaltigen Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij})_{m \times n} =: (a_{ij}), \quad a_{ij} \in K$$

Eintrag in i -ter Zeile u. j -ter Spalte

Menge aller $m \times n$ -Matrizen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ mit Einträgen aus $K =: \underline{K^{m \times n}}$.

Spezielle Matrizen:

Nullmatrix $0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$; Einheitsmatrix $\mathbf{1} := \mathbf{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$

$A = a = (a_1 \cdots a_n) \in K^{1 \times n}$, $B = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$ Zeilen- bzw. Spaltenmatrix(vektor)

Satz 1.4 Für die reduzierte Zeilenstufenform R einer quadr. Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt:
entweder hat R eine Nullzeile oder $R = \mathbf{1}_n$.

Bew. $(p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q)$ Ist die letzte Zeile von R keine Nullzeile, so muss $R = \mathbf{1}_n$ sein nach Konstruktion von R .

$(\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \equiv p \Rightarrow \neg q)$ Hat R eine Nullzeile, so ist $R \neq \mathbf{1}_n$.

NB Hier wären noch Erläuterungen zum Umgang mit den Junktoren $\neg$ = nicht, $\wedge$ = und, $\vee$ = oder, $\Rightarrow$ = wenn ... dann, $\Leftrightarrow$ = genau dann, wenn nötig (mathem. Logik). Übung

Def. Gleichheit von $A, B \in K^{m \times n}$: $A = B \Leftrightarrow \bigwedge_{i,j} a_{ij} = b_{ij}$, d. h. komponentenweise Gleichheit

Also $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrixoperationen

z. B.
$$3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ \frac{7}{2} & -1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Def. Addition: $A + B = C \Leftrightarrow \bigwedge_{i,j} c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation: $kA = B \Leftrightarrow \bigwedge_{i,j} ka_{ij} = b_{ij}$

Differenz: $A - B := A + (-1)B = A + (-B); (-1)B =: -B$

d. h. komponentenweise Addition bzw. Multiplikation

Oben steht ein Beispiel für eine

Def. Linearkombination von $A_1, \dots, A_r \in K^{m \times n}$ mit Koeffizienten $k_1, \dots, k_r \in K$:

$$k_1 A_1 + \dots + k_r A_r = \sum_{i=1}^r k_i A_i \quad (\in K^{m \times n})$$

Def. Matrixprodukt von $A \in K^{m \times r}, B \in K^{r \times n}$: $AB = C \in K^{m \times n}$

Zeile i von A $\left(\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \end{array} \right) = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ik})_{m \times r} (b_{kj})_{r \times n}$

Spalte j von B

Zeilenlänge (A) = r = Spaltenlänge (B)

Einträge des Produkts:

$$(AB)_{ij} = c_{ij}, \quad c_{ij} := (a_{i1} \ \dots \ a_{ir}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj} \quad (\text{Zeile mal Spalte})$$

z. B. $(1 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 + 0 + 0) = (2) \in K^{1 \times 1}; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 3};$

$1 \times 3 \quad 3 \times 1 \qquad \qquad \qquad 3 \times 1 \quad 1 \times 3$

z. B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = -5 \mathbf{1} \in K^{2 \times 2}$

NB i. Allg. $AB \neq BA$, d. h., Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

Mit der Zerlegung von A, B in 1-zeilige bzw. 1-spaltige Untermatrizen a_i bzw. b_j hat man

$$AB = \left(\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \right) (b_1 \mid \dots \mid b_n) = \left(\begin{array}{ccc} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{array} \right) \quad a_i \in K^{1 \times r}, \quad b_j \in K^{r \times 1}$$

$$AB = \left(\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \right) B = \left(\begin{array}{c} a_1 B \\ \vdots \\ a_m B \end{array} \right), \quad AB = A(b_1 \mid \dots \mid b_n) = (Ab_1 \mid \dots \mid Ab_n)$$

Ein LGS

$$(A|b) \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \text{kann also geschrieben werden als}$$

Matrizengleichung

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax = b$$

Linearkombination

der Spalten von A mit Koeffizienten x_j , denn $a_{ij}x_j = x_j a_{ij}$ für $a_{ij}, x_j \in K$.

Def. Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ heißt die durch $a_{ji}^T := a_{ij}$ definierte Matrix $A^T = (a_{ji}^T) \in K^{n \times m}$ die Transponierte von A.
Man erhält also A^T aus A, indem die Zeilen als Spalten geschrieben werden.

z. B. $(1 \ 2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$
Spiegelung an der Hauptdiagonalen

Def. Spur einer quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$: $\text{sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ = Summe der Elemente der Hauptdiagonalen von A

Def. Potenz einer quadr. Matrix A: $A^r := A A \dots A$
r Faktoren

Somit lässt sich für ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r$ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r \in K$
definieren: $f(A) := a_0 \mathbf{1} + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_r A^r$ $\mathbf{1}, A \in K^{n \times n}$

4. Rechenregeln für Matrizen

Satz 1.5 Sind die angegebenen Operationen für Matrizen A, B, C, $\mathbf{1}$ und Skalare a, b, $1 \in K$ ausführbar, so gilt:

- | | | | | |
|-------|---|-------|---------------------------------|-------------------|
| i) | $(A + B) + C = A + (B + C)$ | i)* | $(AB)C = A(BC)$ | Assoziativität |
| ii) | $A + 0 = 0 + A = A$ | ii)* | $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$ | neutrales Element |
| iii) | $A + (-A) = -A + A = 0$ | iii)* | ? ... | inverses Element |
| iv) | $A + B = B + A$ | iv)* | ? ... | Kommutativität |
| v) | ① $A(B + C) = AB + AC$, ② $(B + C)A = BA + CA$ | | | Distributivgesetz |
| vi) | ① $a(bA) = (ab)A$, ② $a(AB) = (aA)B = A(aB)$ | | | |
| vii) | $(a + b)A = aA + bA$ | | | |
| viii) | $a(A + B) = aA + aB$ | | | |
| ix) | $1A = A$ | | | |

NB i) - iv), i)* - iv)*, v) Körperaxiome
i) - iv), vi)① [ohne vi)②] - ix) Vektorraumaxiome (V. Kapitel)

Bew.: Es ist jeweils die komponentenw. Gleichheit zu zeigen,

z. B. v)①) $A(B + C) = AB + AC$, $A \in K^{m \times r}$, $B, C \in K^{r \times n}$
 $D \quad D' \quad D'' \quad D, D', D'' \in K^{m \times n}$
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj} \stackrel{1. \text{ Extrabl. i)}}{=} \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^r a_{ik} c_{kj} = d'_{ij} + d''_{ij}$$

z. B. i)* $A = (a_{ik}) \in K^{m \times r}$, $B = (b_{kl}) \in K^{r \times s}$, $C = (c_{lj}) \in K^{s \times n}$
 $A(BC) = D$, $(AB)C = D'$
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} \left(\sum_{l=1}^s b_{kl} c_{lj} \right) \stackrel{1. \text{ Extrabl. iv)}}{=} \sum_{l=1}^s \left(\sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = d'_{ij}$$

Die Beweise der übrigen Regeln sind dagegen einfach (Übung).

NB Die meisten Eigenschaften des Körpers K übertragen sich auf Matrizen mit Einträgen aus K , außer z. B.

in K gilt: i) $a \neq 0 \wedge ab = ac \Rightarrow b = c$ Kürzungsregel
 ii) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ Nullteilerfreiheit
 d.h. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
 $p \Rightarrow q \vee r \equiv \neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p \equiv \neg q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$

jedoch:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $A \quad B = A \quad C = 0$
 aber $B \neq C$ aber $A, B \neq 0$

Das liegt daran, dass man nicht immer die "Kehrmatrix" einer Matrix $A \neq 0$ bilden kann. Zu diesem Sachverhalt:

Def. Existiert für $A \in K^{n \times n}$ ein $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = BA = \mathbf{1}$, so heißt A invertierbar (regulär) und B die Inverse von A ,

z. B. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ mit $ac - bd \neq 0$, $B = \frac{1}{ac - bd} \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$,

z. B. $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 3}$ ist nicht invertierbar, da $AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{1}$ für alle $B \in K^{3 \times 3}$,

und allgemein für $A \in K^{n \times n}$: wenn A eine Nullzeile hat, dann ist A nicht invertierbar (singulär).

Satz 1.6 A invertierbar $\Leftrightarrow$ Die red. Zeilenstufenform von A ist $\mathbf{1}$ (Bew. nächster Abschn. 5.).

Satz 1.7 Die Inverse B einer invertierbaren Matrix A ist eindeutig.

Bew.: $AB = AB' = B'A = \mathbf{1}$ impliziert $B = \mathbf{1}B = (B'A)B = B'(AB) = B'\mathbf{1} = B'$.

Zur Schreibweise: Die eindeutig best. Inverse B einer invert. Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet, also $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, wenn A invertierbar ist.

Satz 1.8 Sind $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbar, so auch

i) A^{-1} mit $(A^{-1})^{-1} = A$, wegen $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{1}$
 ii) AB mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, wegen $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbf{1}A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{1}$
 $(B^{-1}A^{-1})(AB) = \dots = \mathbf{1}$

Satz 1.9 Sind die angegebenen Matrixoperationen ausführbar, so gilt:

i) $(A^T)^T = A$ ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ iii) $(kA)^T = kA^T$, $k \in K$
 iv) $(AB)^T = B^T A^T$ v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bew. i) – iii) folgt direkt aus der Def. von A^T

v) $A^T (A^{-1})^T \stackrel{\text{iv)}}{=} (A^{-1}A)^T = \mathbf{1}^T = \mathbf{1}$, $(A^{-1})^T A^T = \dots = \mathbf{1}$

iv)

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ir} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & c_{ij} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} i\text{-te Zeile} \\ j\text{-te Spalte} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Transponierung} \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ c_{ij} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ j\text{-te Zeile} \\ i\text{-te Spalte} \end{array} \\
 \begin{array}{c} B^T \quad A^T = C^T = (AB)^T \\ \sum_{k=1}^r b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} = c_{ij} \end{array}
 \end{array}$$

5. Elementarmatrizen

Def. Eine Matrix $E \in K^{n \times n}$ heißt Elementarmatrix, wenn sie durch eine elem. Z-Umf aus $\mathbf{1} \in K^{n \times n}$ entsteht, d. h.

Einheitsmatrix $\mathbf{1} \xrightarrow{\text{eine elem. Z-Umf}} \text{Elementarmatrix } E$

Satz 1.10 Wird dieselbe Z-Umf auf A , $\mathbf{1} \in K^{n \times n}$ angewendet und dabei E aus $\mathbf{1}$ entsteht, so wird A zu EA umgeformt, d. h.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{E} & E \\
 A & \xrightarrow{\quad} & EA
 \end{array}
 \quad \text{durch dieselbe elem. Z-Umf}$$

Bew.: z. B. Vertauschung zweier Zeilen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i_0 \\ k_0 \end{array}, \quad EA = C$$

$i_0 \quad k_0$

$$\begin{array}{c} i\text{-te Zeile v. } E \\ i \neq i_0, k_0: c_{ij} = (0 \cdots \cdots 1 \cdots \cdots 0) \\ \text{Stelle } i \end{array} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}, \quad \text{d. h., die Zeilen } a_i \text{ von } A \text{ bleiben unverändert.}$$

$$\begin{aligned}
 i = i_0 : c_{i_0 j} &= (0 \dots 0 \dots 1 \dots 0) \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_0 j} \\ \vdots \\ a_{k_0 j} \\ \vdots \end{pmatrix} = a_{k_0 j} & \text{d. h., die } i_0\text{-te Zeile von } EA = C \\
 i = k_0 : c_{k_0 j} &= (0 \dots 1 \dots 0 \dots 0) \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_0 j} \\ \vdots \\ a_{k_0 j} \\ \vdots \end{pmatrix} = a_{i_0 j} & \text{ist die } k_0\text{-te Zeile von } A. \\
 & \text{Stelle } i_0 \quad k_0
 \end{aligned}$$

Ein rein formaler (korrekterer !?) Beweis wird natürlich so geführt, dass mit der Definition des Produkts $(EA)_{ij} = C_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ik} a_{kj}$ argumentiert (gerechnet) wird. (Übung)

Satz I.11 Jede Elementarmatrix E ist invertierbar, und die Inverse E^{-1} ist ebenfalls eine Elementarmatrix.

Bew.: Die elem. Z-Umf, die aus $\mathbf{1} \rightarrow E$ bewirkt, wird mittels der entsprechenden Z-Umf bzw. Elementarmatrix E_0 rückgängig gemacht.
Man hat also mit Satz I.10 $E_0 E = \mathbf{1}$ und $E E_0 = \mathbf{1}$, d. h., E ist invertierbar mit $E^{-1} = E_0$.

Satz I.12 Für eine quadr. Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) A ist invertierbar.
- ii) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x_0 = 0 \in K^{n \times 1}$.
- iii) Die reduz. Z-Stf. R von A ist $\mathbf{1} \in K^{n \times n}$.
- iv) A ist als Produkt von Elementarmatrizen darstellbar, d. h. $A = E_1 E_2 \dots E_r$ mit Elementarm. E_i .

Bew. (Ringbeweis): Es wird $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
 i) \Rightarrow ii): (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) &\equiv p \wedge q \Rightarrow r \\
 x_1 = \underset{p}{\mathbf{1}} x_1 &= (A^{-1} A) x_1 = A^{-1} (A x_1) = \underset{q}{A^{-1} 0} = 0
 \end{aligned}$$

$$ii) \Rightarrow iii): \{0\} = \text{Lös}(A|0) \stackrel{\text{Satz I.1}}{=} \text{Lös}(R|0) \Rightarrow (R|0) \text{ hat keine Nullzeile (warum?),}$$

$$\text{d. h. } n \text{ führende Einsen} \Rightarrow (R|0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \mathbf{1}$$

wobei $(R|0)$ die reduz. Z-Stf. der erweiterten Matr. $(A|0)$ darstellt.

iii) $\Rightarrow$ iv): A wird mit Elementarmatr. $E_1, E_2, \dots, E_r$ auf reduz. Z-Stf. gebracht, d. h.

$$E_r \dots E_2 E_1 A \stackrel{\text{Satz I.10}}{=} R \stackrel{\text{Vor.}}{=} \mathbf{1} \stackrel{\text{Satz I.8,11}}{\Rightarrow} A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_r^{-1}$$

NB Aus Satz I.8,ii folgt allgemein: Das Produkt von r invertierbaren Matrizen ist invertierbar und die Inverse ist das Produkt der r Inversen im umgekehrten Reihenfolge, d. h. $(A_1 A_2 \dots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$

iv) $\Rightarrow$ i): $A = E_1 E_2 \dots E_r$ ist invertierbar nach Satz I.8, da jede Elementarmatrix E_i invertierbar ist.

Eine Methode, die Inverse A^{-1} einer invertierbaren Matrix A auszurechnen.

Nach Satz I.12 lässt sich A durch elem. Z-Umf auf die red. Z-Stf $\mathbf{1}$ bringen, d. h. nach Satz I.10 mit r Elementarmatrizen E_i aus A $E_r \dots E_2 E_1 A = \mathbf{1}$ herstellen, und simultan A^{-1} aus $\mathbf{1}$. Mit $E := E_r \dots E_2 E_1$ hat man also

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cc} A & \mathbf{1} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{1} = EA & E\mathbf{1} = E = A^{-1} \end{array} & \text{bzw.} & \begin{array}{cc} (A & \mathbf{1}) \\ \downarrow & \\ (\mathbf{1} & A^{-1}) \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{durch elem. Z-Umf. der } n \times 2n\text{-Matrix } (A\mathbf{1}).$$

6. Mehr zu LGS'en und invertierbaren Matrizen

Satz I.13 Ein LGS $Ax = b$, $A \in K^{m \times n}$ hat entweder keine, d. h. $\text{Lös}(A|b) = \{\}$
 oder genau eine Lösung, d. h. $\text{Lös}(A|b) = \{x_1\} \subseteq K^{n \times 1}$
 oder $\bigvee_{x_1, x_2} \{x_1 + k(x_2 - x_1) \mid x_1 \neq x_2, k \in K\} \subseteq \text{Lös}(Ab)$,
 d. h. abzählbar unendlich viele Lösungen für $K = \mathbb{Q}$.

Bew.: $A(x_1 + k(x_2 - x_1)) \stackrel{\text{Satz I.5}}{=} Ax_1 + k(Ax_2 - Ax_1) \stackrel{\text{Vor.}}{=} b + k(b - b) = b$

Für die Invertierbarkeit einer quadr. $n \times n$ -Matrix A reicht schon der Nachweis der Existenz einer $n \times n$ -Matrix B mit $BA = \mathbf{1}$ oder $AB = \mathbf{1}$ wegen:

Satz I.14 Für quadr. $A, B \in K^{n \times n}$ gilt i) $BA = \mathbf{1} \Rightarrow B = A^{-1}$ ii) $AB = \mathbf{1} \Rightarrow B = A^{-1}$.

Bew. i): Anwendung von Satz I.12, der u. a. besagt: A^{-1} existiert $\Leftrightarrow \text{Lös}(A0) = \{0\}$.
 Einerseits ist stets $0 \in \text{Lös}(A0)$, andererseits gilt für $x_1 \in \text{Lös}(A0)$, d. h. $Ax_1 = 0$,
 $x_1 \stackrel{\text{Vor.}}{=} (BA)x_1 = B(Ax_1) = B0 = 0$, d. h. $x_1 \in \{0\}$. Somit ist $B = BAA^{-1} \stackrel{\text{Vor.}}{=} \mathbf{1}A^{-1} = A^{-1}$.

ii): folgt aus i) mit $(B^{-1})^{-1} = B$.

NB Es gilt also: $A^{-1} = B \Leftrightarrow AB = \mathbf{1} \Leftrightarrow BA = \mathbf{1}$ für $A, B \in K^{n \times n}$.

Satz I.15 Für quadr. Matr. $A \in K^{n \times n}$ sind äquivalent

- i) A ist invertierbar, d. h. A^{-1} existiert
- ii) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar für jedes $b \in K^{n \times 1}$
- iii) $Ax = b$ ist lösbar für jedes $b \in K^{n \times 1}$

Bew. i) $\Rightarrow$ ii), denn die eindeutige Lösung ist $x_1 = A^{-1}b$

ii) $\Rightarrow$ iii) trivial

iii) $\Rightarrow$ ii) nach Vor. gibt es für jedes $e_i^T := (0 \dots 1 \dots 0)^T \in K^{n \times 1}$ ein $x_i \in K^{n \times 1}$ mit $Ax_i = e_i$.
 i-te Kompon.

Damit lässt sich die $n \times n$ -Matrix $B = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ bilden, für die

$AB = A(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) = (Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) = \mathbf{1}$ gilt, woraus nach Satz I.14 die Invertierbarkeit von A folgt.

NB Später wird der nahe liegenden Frage nachgegangen, die für eine beliebige Matrix $A \in K^{m \times n}$ lautet: Für welche $b \in K^{m \times 1}$ ist $Ax = b$ überhaupt lösbar; und wie kann man diese b 's möglichst einfach beschreiben?

7. Spezielle quadratische Matrizen

obere

Dreiecksmatrix

untere

$$U := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = 0 \text{ für } i > j$$

$$L := \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = 0 \text{ für } i < j$$

Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

NB $A = U \wedge A = L \Leftrightarrow A = D$

Die Z-Stf. einer quadr. Matr. ist eine obere Dreiecksmatrix.

Satz I.16 i) $U^T = L$, $L^T = U$, ii) $U_1 U_2 = U$, $L_1 L_2 = L$ iii) $U_1^{-1} = U$, $L_1^{-1} = L$
d. h., die Gestalten bleiben hierbei erhalten.

Bew. i) klar; iii) später, II. Kap.

ii) $U_1 = A$, $U_2 = B$, $AB = C$

Für $i > j$ d. h. $i - 1 \geq j$ ist $c_{ij} = 0$, was $C = U$ bedeutet,

Für $i > j$ d. h. $i - 1 \geq j$ ist $c_{ij} = 0$, was $C = U$ bedeutet,

denn

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} j \text{ Nullen in der } i\text{-ten Zeile von } A \\ i - 1 \text{ Nullen,} \\ \text{d. h. mindestens} \\ j \text{ Nullen} \end{matrix}$$

Formal: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}$
 $= 0 \quad = 0$
da $a_{ik} = 0$ für $k \leq i - 1$, da $b_{kj} = 0$ für $k \geq i > j$.

Damit erhält man $L_1 L_2 = ((L_1 L_2)^T)^T = (L_2^T L_1^T)^T = (U_2 U_1)^T = U^T = L$.

Symmetrische Matrizen

Def. A symmetrisch : $\Leftrightarrow A^T = A$

z. B. AA^T , $A^T A$ für bel. $A \in K^{m \times n}$

Satz I.17 Sind $A, B \in K^{n \times n}$ symmetr., so auch i) A^T ii) $A + B$ iii) kA für $k \in K$

Bew. folgt direkt aus Satz I.9.

NB A, B symmetr. $\nRightarrow AB$ symmetr., denn $(AB)^T = B^T A^T = BA \neq AB$.
i. Allg.

Satz I.18 Für invert. Matr. A gilt i) A symmetr. $\Rightarrow A^{-1}$ symmetr. ii) AA^T , $A^T A$ sind invertierbar.

Bew. i) $(A^{-1})^T \stackrel{\text{Satz I.9}}{=} (A^T)^{-1} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A^{-1}$

ii) Da nach Satz I.9 A^T invertierbar ist, wenn A es ist, haben auch die Produkte nach Satz I.8 diese Eigenschaft.

II. Kapitel - Determinanten

1. Die Determinantenfunktion

Der Begriff der bijektiven Abbildung (Bijektion, 1-1-Zuordnung) wird als bekannt vorausgesetzt!

Def. i) Eine bijektive Abbildung p auf $\mathbb{N}(n) = \{1, 2, \dots, n\}$ heißt Permutation von n Elementen.

Schreibweise: $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} =: (p(1) \ p(2) \ \dots \ p(n))$

ii) Die Menge aller Permutationen von n Elementen wird mit S_n bezeichnet und Permutationsgruppe (symmetrische Gruppe) genannt.

NB S_n enthält also alle möglichen Anordnungen bzw. Vertauschungen der Reihenfolge der Zahlen 1 bis n , wovon es bekanntlich $n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$ gibt, d. h.

$$\#(S_n) = n! .$$

Weiteres zur Gruppe S_n später.

Def. i) Ein Paar (i, i^*) heißt Inversion (Fehlstand) von $p = (p(1) \ \dots \ p(n))$, wenn $p(i) > p(i^*)$ ist für $i < i^*$.

ii) Eine Permutation heißt gerade, wenn die Anzahl ihrer Inversionen gerade ist, andernfalls ungerade.

iii) Jeder Permutation $p \in S_n$ wird ein Vorzeichen (Signum) zugeordnet durch:

$$\text{sig}(p) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } p \text{ gerade} \\ -1, & \text{wenn } p \text{ ungerade} \end{cases}$$

$p \in S_3$	:	(1 2 3)	(2 3 1)	(3 1 2)	(3 2 1)	(2 1 3)	(1 3 2)
Anzahl der Inversionen:	:	0	2	2	3	1	1
sig(p)	:	1	1	1	-1	-1	-1

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ gegeben.

Def. Für ein $p \in S_n$ heißt das Produkt der Form $a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$ elementares Produkt

NB Ein elem. Produkt einer quadr. Matrix A enthält also aus jeder Zeile und jeder Spalte von A genau ein Element als Faktor.

Def. Die Summe aller signierten elementaren Produkte von $A \in K^{n \times n}$ wird mit Determinante von A bezeichnet, d. h., man hat die Funktion

$$\det : K^{n \times n} \rightarrow K$$

$$A \mapsto \det(A) := \sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)} \quad (\text{Leibnizsche Formel})$$

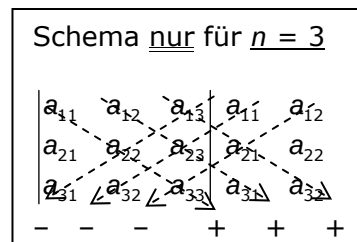
$$\text{z. B.} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

NB Zur Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \text{ ist für } ac - bd = \det(A) \neq 0 \text{ invertierbar mit } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}.$$

z. B.

$$A \in K^{3 \times 3} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := \det(A) = \begin{matrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} \\ + a_{12} & a_{23} & a_{31} \\ + a_{13} & a_{21} & a_{32} \\ - a_{13} & a_{22} & a_{31} \\ - a_{12} & a_{21} & a_{33} \\ - a_{11} & a_{23} & a_{32} \end{matrix}$$



z. B. $\det(\mathbf{1}_n) = |\mathbf{1}_n| = 1$

$$\sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = 1, \text{ da } a_{ip(i)} = 0 \text{ für } i \neq p(i) \text{ und } \text{sig}(1 \ 2 \ \cdots \ n) = +1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -120 = \text{sig}(p) a_{11} a_{25} a_{33} a_{44} a_{52} = (-1) \cdot 5 \cdot (-4) \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -120$$

Permutation $p = (1 \ 5 \ 3 \ 4 \ 2)$
Anzahl der Inversionen: $0 + 3 + 1 + 1 = 5$, also $\text{sig}(p) = -1$

Satz 11.1 Für quadr. Matr. $A \in K^{n \times n}$ ist

- i) $\det(A) = 0$, wenn A eine Nullzeile (-spalte) enthält
- ii) $\det(A) = \det(A^T)$

Bew.:

- i) Jedes elem. Produkt enthält als Faktor eine Null aus der vorliegenden Nullzeile (-spalte).
- ii) Die Äquivalenz der drei Aussagen (bzw. Anweisungen)

"Aus jeder Zeile u. Spalte Spalte u. Zeile Zeile u. Spalte
von A $\Leftrightarrow$ von A $\Leftrightarrow$ von A^T
genau ein Element auswählen"
und die Eigenschaft $\text{sig}(p) = \text{sig}(p^{-1})$ für jedes $p \in S_n$ impliziert die Gleichheit von
Menge aller sign. = Menge aller sign.
elem. Produkte von A = elem. Produkte von A^T

Dazu (u. U. ausführlicher)

- $\alpha)$ Mit $B = A^T \in K^{n \times n}$, d. h. $(b_{ij}) = (a_{ji})^T = (a_{ji})$, und $p, p^{-1} = q \in S_n$ hat man wegen $p(i) = j \Leftrightarrow i = p^{-1}(j) = q(j)$

$$\begin{matrix} a_{1p(1)} & a_{2p(2)} & \cdots & a_{np(n)} \\ 1. & 2. & & n\text{-te Zeile von A} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{q(1)1} & a_{q(2)2} & \cdots & a_{q(n)n} \\ 1. & 2. & & n\text{-te Spalte von A} \end{matrix}$$

(nach Vertauschung der Faktoren)

$$= \begin{matrix} b_{1q(1)} & b_{2q(2)} & \cdots & b_{nq(n)} \\ 1. & 2. & & n\text{-te Zeile von } A^T. \end{matrix}$$

- $\beta)$ $\text{sig}(p) = \text{sig}(p^{-1})$
 p und $p^{-1} \in S_n$ haben dieselbe Anzahl von Inversionen, denn mit $p(i) = j$, $p(i^*) = j^*$ hat man
 (i, i^*) ist Inversion von $p \Leftrightarrow i < i^*$ und $p(i) > p(i^*) \Leftrightarrow j^* < j$ und $p^{-1}(j^*) > p^{-1}(j)$
 $\Leftrightarrow (j^*, j)$ ist Inversion von p^{-1} .

2. Zur Berechnung der Determinanten

Satz II.2

- i) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
- ii) Entsprechend ist auch die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix U gleich dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente.

Bew.: i) Sei $L = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Die elem. Produkte $a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$ sind garantiert Null für $i < p(i) = j$. Also muss $p(1) \leq 1$, also $p(1) = 1$ sein für ein möglicherweise von Null verschiedenes elem. Produkt. Auch muss $p(2) = 2$ sein, da $p(2) \leq 2$ und $p(2) \neq 1$ wegen der Bijektivität von p ist. $p(3) = 3, \dots, p(n) = n$ wird also notwendig sein für ein nicht garantiert verschwindendes elem. Produkt. Da $p = (1 \ 2 \dots n)$ eine gerade Permutation ist, folgt die Behauptung

$$\text{ii) } \det(U) \underset{\text{Satz II.1}}{=} \det(U^T) \underset{\text{Satz I.16}}{=} \det(L) \underset{\text{i)}}{=} \dots$$

NB Mit dem obigen Satz kann der Rechenaufwand u. U. erheblich verringert werden.

Die Wirkung von elem. Z-Umf. und analogen elem. Spaltenumformungen beschreibt

Satz II.3 $a_{ii}, a_{i*} = i, i^*$ -te Zeile von $A \in K^{n \times n}$ mit $i \neq i^*$

elem. Z-Umf.

$$\text{i) Typ I}_Z: \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ für } k \in K \quad \begin{array}{l} \text{d. h., die} \\ \text{det-Funktion} \\ \text{ist } \underline{\text{homogen}} \text{ in jeder Zeile} \end{array}$$

$$\text{ii) Typ II}_Z: \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i*} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{i*} \\ a_i \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) Typ III}_Z: \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i*} + ka_i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i*} \end{pmatrix}$$

iv) wegen $\det(A) = \det(A^T)$ gelten die drei analogen Gleichungen für elem. Sp.-Umf. vom Typ I_S, II_S, III_S .

NB Da $\det(\mathbf{1}) = 1$, folgt für die Determinanten der Elementarmatrizen:

elem. Z-Umf.

$$\text{Typ I}_Z : \det(E) = k \neq 0$$

$$\text{Typ II}_Z : \det(E) = -1$$

$$\text{Typ III}_Z : \det(E) = 1$$

Bew.: i)

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} \cdots ka_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} =$$

$$k \sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} = k \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ii) siehe Literatur

iii) Zunächst: die det-Funktion ist auch additiv in jeder Zeile, d. h.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ denn } \sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} \cdots (a_{ip(i)} + b_{ip(i)}) \cdots a_{np(n)}$$

$$= \sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} + \sum_{p \in S_n} \text{sig}(p) a_{1p(1)} \cdots b_{ip(i)} \cdots a_{np(n)}.$$

Also folgt mit dem nächsten Satz II.4 $\det \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i*} + ka_i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i*} \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_i \\ ka_i \end{pmatrix}}_{= 0}$

NB Aus Satz II, 3 i) folgt sofort für $A \in K^{n \times n}$, $k \in K$ $\det(kA) = k^n \det(A)$.
 Eine Abbildung f heißt linear, wenn sie additiv und homogen ist, d. h.
 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ und $f(ka) = kf(a)$ gilt. Genauer dazu später.

Satz II.4 Enthält eine Matrix zwei proportionale Zeilen (Spalten), so ist ihre Determinante Null,

d. h. $\det \begin{pmatrix} a_i \\ ka_i \end{pmatrix} = 0$, mit $k \in K$.

Bew.:

$$\det \begin{pmatrix} a_i \\ ka_i \end{pmatrix} \stackrel{\text{Satz II.3 i)}}{=} k \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} \stackrel{\circledast}{=} k \cdot 0 = 0$$

$\circledast$ Anwendung von $d = -d \Rightarrow d = 0$ für $d \in K$: $\det \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix}$ nach Satz II.3 ii).

z. B. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{II}_2}{=} - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{I}_2}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{III}_2}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \stackrel{\text{III}_2}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$

$$\stackrel{\text{Satz II.2}}{=} -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$

Die Dreiecksmatrix lässt sich auch herstellen, wenn nur die Z-Umf. Typ III₂ angewendet wird.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -15 \\ 0 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & -3 & * \\ 0 & 0 & -\frac{165}{3} \end{vmatrix} = 165$$

Das ist immer möglich!

Satz II.5 Jede quadr. Matr. $A \in K^{n \times n}$ lässt sich in eine obere Dreiecksmatrix verwandeln durch alleinige Anwendung der elem. Z-Umf. Typ III_Z, d. h. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Bew.: Vollst. Induktion

- i) $n = 1$: $(a) \in K^{1 \times 1}$ ist obere Dreiecksmatr.
- ii) Sei $n > 1$ und $A \in K^{n+1 \times n+1}$, dann kann die erste Spalte von A mit geeigneten elem. Z-Umf. von Typ III_Z so "aufgeräumt" werden, dass ab der zweiten Stelle nur noch Nullen stehen, d. h. $a_{i1} = 0$ für jedes $i \geq 2$. Also

$$A \xleftrightarrow{\text{Typ III}_Z} A' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & \tilde{A} & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \quad \text{mit } \tilde{A} \in K^{n \times n}$$

Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich $\tilde{A}$ in eine obere Dreiecksmatr. $\tilde{U} \in K^{n \times n}$ verwandeln. Diese Operationen verwandeln A' in die behauptete Dreiecksgestalt, d. h.

$$A' \xleftrightarrow{\text{Typ III}_Z} U = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n+1} \\ 0 & & \\ \vdots & \tilde{U} & \\ 0 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a''_{n+1, n+1} \end{vmatrix}$$

NB Man erhält damit die Folgerung: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ lässt sich in eine Diagonalmatr. umformen durch alleinige Verwendung der Zeilenoperationen von Typ III_Z.

$$\text{Denn nach Satz II.5 ist } A \xleftrightarrow{\text{Typ III}_Z} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ & a'_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a'_{nn} \end{vmatrix} = A' \text{ und } \det(A) = \prod_{i=1}^n a'_{ii} \neq 0 \text{ nach Satz II.}$$

Also lässt sich die 2-te Spalte von A' mit $a'_{22} \neq 0$, die 3-te Spalte mit $a'_{33} \neq 0$ u. s. w. "nach oben hin ausräumen".

3. Weitere Eigenschaften der det-Funktion

Die relative komplizierten Definitionen des Matrixprodukts AB und der Determinante $\det(A)$ zeigen die sehr einfache Beziehung

$$\det(AB) = \det(A) \det(B),$$

zu deren Beweis die zwei folgenden Lemmata dienen.

Lemma II.6 Für E(lementarm.), $A \in K^{n \times n}$ gilt $\det(EA) = \det(E) \det(A)$.

Bew.: Man erhält für die drei Typen von elem. Z-Umf. nach Satz II.3

$$\text{Typ I}_Z, \det(E) = k : \det(EA) = k \det(A)$$

$$\text{Typ II}_Z, \det(E) = -1 : \det(EA) = -\det(A) = (-1) \det(A)$$

$$\text{Typ III}_Z, \det(E) = 1 : \det(EA) = \det(A) = 1 \cdot \det(A).$$

NB Allgemein folgt für $E_1, E_2, \dots, E_r$: $\det(E_r \dots E_2 E_1 A) = \det(E_r) \dots \det(E_2) \det(E_1) \det(A)$
 $= \det(E_r \dots E_2 E_1) \det(A)$.

Lemma II.7 A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Bew.: " $\Rightarrow$ " A invertierbar $\xRightarrow{\text{Satz I.12}} A = E_1 E_2 \dots E_r \xRightarrow{\text{Lemma II.6}} \det(A) = \det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_r) \neq 0$,
da $\det(E_i) = \pm 1$ oder $\det(E_i) = k \neq 0$.

" $\Leftarrow$ " A wird mit r E_i 's auf red. Z-Stf. gebracht, d. h. $E_r \dots E_2 E_1 A = R$.
Da $\det(A) \neq 0$ vorausgesetzt ist, folgt mit Lemma II.6 **NB** $\det(R) \neq 0$,
d. h. nach Satz II.1, dass R keine Nullzeile hat. Dann muss nach Satz I.4
 $R = \mathbf{1}$ sein und das bedeutet nach Satz I.12, dass A invertierbar ist.

Theorem II.8 Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Bew. (Fallunterscheidung):

- i) $\det(A) = 0 \xRightarrow{\text{Lemma II.7}} A$ nicht invertierbar $\xRightarrow{\text{Übung}} AB$ nicht invertierbar $\xRightarrow{\text{Lemma II.7}} \det(AB) = 0 = 0 \det(B)$
- ii) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar $\Rightarrow A = E_1 E_2 \dots E_r \Rightarrow \det(AB) = \det(E_1 E_2 \dots E_r B)$
 $= \det(E_1 E_2 \dots E_r) \det(B) = \det(A) \det(B)$
mit Satz I.12 und Lemma II.6,7

Korollar II.9 Für die Inverse A^{-1} einer invertierbaren Matrix A gilt:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bew.: $1 = \det(\mathbf{1}) = \det(A^{-1}A) \xRightarrow{\text{Theorem II.8}} \det(A^{-1}) \det(A)$

Für $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$ lässt sich $Ax = \lambda x$ äquivalent umformen zu $(A - \lambda \mathbf{1})x = 0$.

Von Interesse sind die nichttrivialen Lösungen $x \in K^{n \times 1}$, die es nach Lemma II.7 genau dann gibt, wenn die

charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$ ist.

Def.

Die Lösungen $\lambda \in K$ der charakt. Gl. $\det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$ heißen Eigenwerte der Matrix $A \in K^{n \times n}$.

Die zu λ gehörenden nichttrivialen Lösungen $x \in K^{n \times 1}$ von $(A - \lambda \mathbf{1})x = 0$ heißen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda \in K$.

Mehr dazu später, aber hier schon ein Beispiel für $K = \mathbb{R}$ und

z. B. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$ charakteristische Gleichung

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$

Eigenvektoren zu

$$\lambda_1 = 6: (A - 6\mathbf{1})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = r, x_1 = \frac{3}{4}r$$

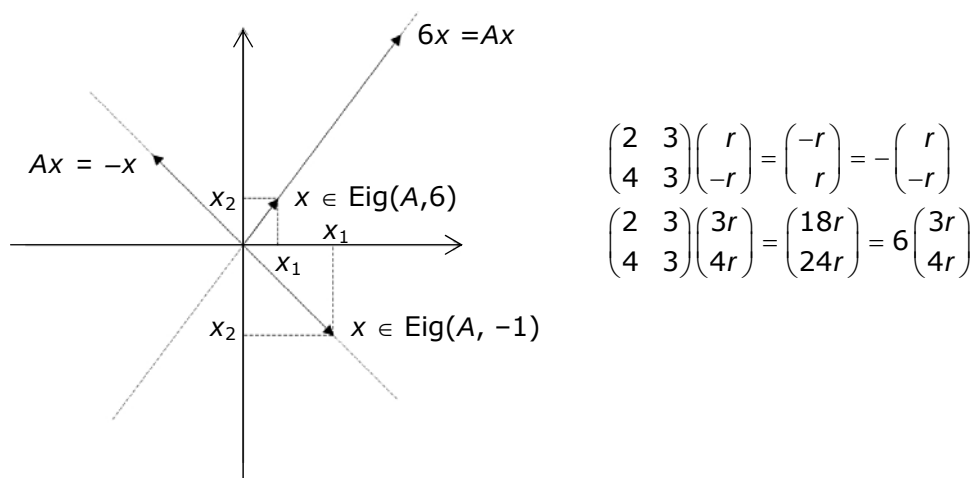
Mit $K^* = K \setminus \{0\}$

liegen alle zu $\lambda_1 = 6$ gehörenden Eigenvektoren in $\text{Eig}^*(A, 6) := \left\{ r \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in K^* \right\} = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid r \in K^* \right\}$.

$$\lambda_2 = -1: (A + \mathbf{1})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $x_2 = r$, $x_1 = -r$ und damit $\text{Eig}^*(A, -1) = \left\{ r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in K^* \right\} = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in K^* \right\}$.

NB Geometrische Interpretation



Die Menge $\text{Eig}(A, \lambda) = \text{Eig}^*(A, \lambda) \cup \{0\}$ heißt Eigenraum von A zum Eigenwert λ .

4. Cofaktorentwicklung, Cramersche Regel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

Def. Minor von a_{ij} : M_{ij} = Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix, die aus $A \in K^{n \times n}$ durch Streichung der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.

Cofaktor von a_{ij} : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $(-1)^{i+j}$: Schachbrettregel: $\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$ u. s.

w.

- +

$$\text{z. B.} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 15 + 150 = 165$$

Die Determinante einer Matrix lässt sich nicht nur nach der ersten Zeile, sondern nach jeder Zeile und jeder Spalte entwickeln.

Entwicklungssatz II.10 (von Laplace, 1749-1827)

Für $(a_{ij}) = A \in K^{n \times n}$ gilt: $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}$, $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}$, wobei c_{ij} der Cofaktor von a_{ij} ist.
Entw. nach i -ter Zeile, j -ter Spalte

Bew.: Da die $\det$ -Funktion in jeder Zeile additiv und homogen ist (s. Satz II.3), lässt sich $\det(A)$ zerlegen in

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und nach $i-1$ bzw. $j-1$ Vertauschungen benachbarter Zeilen bzw. Spalten umformen zu

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{i2}(-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{1n} \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{1n} & a_{11} & a_{12} \\ a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix},$$

$$\text{da } (-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}.$$

Also erhält man

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & A_{i1} \\ a_{n1} \end{vmatrix} + a_{i2}(-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & A_{i2} \\ a_{n2} \end{vmatrix} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{1n} & A_{in} \\ a_{nn} \end{vmatrix}$$

und mit Argumenten hinsichtlich der elementaren Produkte schließlich

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1} |A_{i1}| + a_{i2}(-1)^{i+2} |A_{i2}| + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} |A_{in}|,$$

wobei die besagten Zeilen- und Spaltenumformungen die Matrix A_{ij} erzeugen mit

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{(n-1) \times (n-1)} \quad \begin{array}{l} \text{nach Streichung} \\ \text{der } i\text{-ten Zeile und} \\ \text{}j\text{-ten Spalte von } A. \end{array}$$

Der Ausdruck für die Entw. nach der j -ten Spalte folgt sofort wegen $\det(A) = \det(A^T)$.

NB Die obigen Formeln sind nur dann sehr nützlich, wenn die Matrix A oder ihre Umformung viele Nullen in einer Zeile oder Spalte aufweist.

z. B.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Def. Für $(a_{ij}) = A \in K^{n \times n}$ heißt die Matrix $\text{adj}(A) := \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}^T$ Adjunkte von A , wobei c_{ij} die Cofaktoren von a_{ij} sind.

Theorem II.11 $\text{adj}(A)A = A \text{adj}(A) = \det(A)\mathbf{1}$, d. h. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$
für eine invertierbare Matrix $A \in K^{n \times n}$.

Bew.:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix},$$

da i) nach dem Entwicklungssatz für die Diagonalelemente des Produkts

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij} = \det(A) \text{ ist, und für die anderen, d. h. für } i \neq i^*,$$

ii) $\sum_{j=1}^n a_{ij} c_{i^*j} = 0$ ist, was mit einem Trick gezeigt wird.

Aus $A = \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_{i^*} \end{pmatrix}$ wird $A' = \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a'_{i^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix}$ gebildet, d. h. A und A' unterscheiden sich

nur in der i^* -ten Zeile mit $a'_{i^*1} \ a'_{i^*2} \ \cdots \ a'_{i^*n} = a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}$.

Demnach sind die Cofaktoren C_{i^*j} von A und C'_{i^*j} von A' bzgl. der i^* -ten Zeile gleich, d. h. $C'_{i^*j} = C_{i^*j}$, und man hat mit der Entwicklung nach dieser i^* -ten Zeile

$$0 \underset{\text{Satz II.4}}{=} \det(A') = \sum_{j=1}^n a'_{i^*j} C'_{i^*j} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{i^*j}, \text{ qed.}$$

Der Beweis von $\text{adj}(A)A = \det(A) \mathbf{1}$ verläuft analog, wenn die aus $A = \begin{pmatrix} b_j & b_{j^*} \end{pmatrix}$ gebildete Matrix $A' = \begin{pmatrix} b_j & b_j \end{pmatrix}$ betrachtet wird.

z. B. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ -6 & 10 & -8 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}^T \quad A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ -3 & 10 & -1 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

Satz II.12 Cramersche Regel

Für die Lösungen $x \in K^{n \times 1} =: K^n$ eines LGS's $Ax = b \in K^n$ gilt

$$x_1 \det(A) = \det(A_1), \ x_2 \det(A) = \det(A_2), \ \dots, \ x_n \det(A) = \det(A_n),$$

wobei $A_i (a_1 \ \cdots \ b \ \cdots \ a_n)$ aus $A = (a_1 \ \cdots \ a_j \ \cdots \ a_n)$ dadurch entsteht, dass die j -te Spalte von A durch die "rechte Seite" b des LGS's ersetzt wird.

Bew.: Nach Theorem II.11 hat man mit $\text{adj}(A)A = \det(A)\mathbf{1}$ die Gleichung

$$\det(A)x = \text{adj}(A)Ax = \text{adj}(A)b, \text{ d. h. } \det(A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. für alle } j = 1, \dots, n \quad \det(A)x_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} b_i = \sum_{i=1}^n b_i c_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A_j)$$

mit Entwicklung nach der j -ten Spalte von A_j .

NB In der Literatur findet man auch $A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = \det(A) \mathbf{1}$ (Theorem II.11) als Cramersche Regel und die Aussage von Satz II.12 für invertierbare Matrizen in der Form:
für die Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ des LGS's $Ax = b$ gilt $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

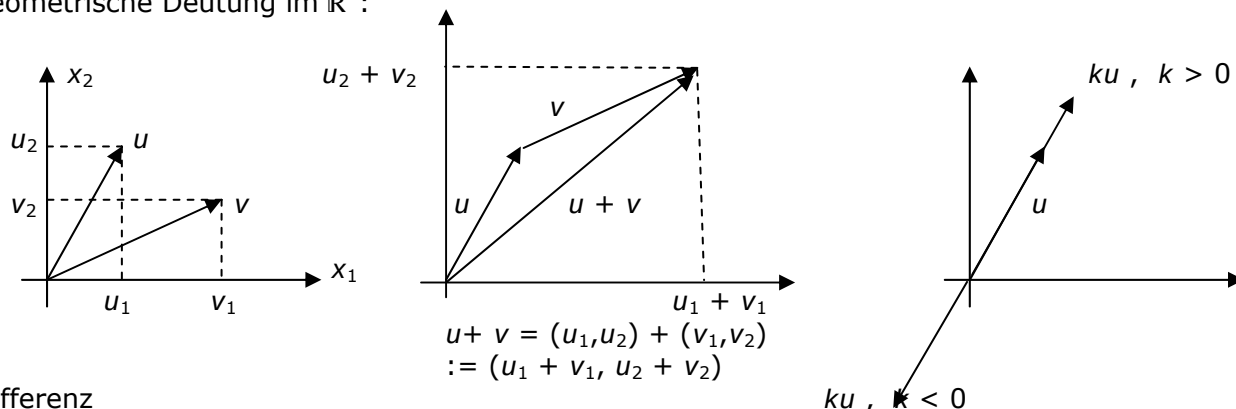
III. Kapitel ist enthalten im IV. Kapitel – Der Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$

1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

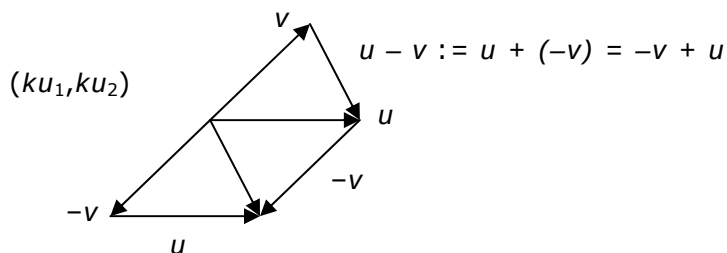
Def. $\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} =$ Menge aller geordneten n -Tupel
mit reellen Komponenten

$\mathbb{R}^n$ heißt n -dimensionaler reeller Vektorraum, wenn die zwei folgenden Operationen definiert sind
für Skalar: $k \in \mathbb{R}$, Vektor: $v \in \mathbb{R}^n$.

Mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation hat man die geometrische Deutung im $\mathbb{R}^2$:



Differenz



$ku, k < 0$
 $ku = k(u_1, u_2) :=$

Grundlegend für den Längen- und Winkelbegriff ist:

Def. Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_e := \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Die Operation $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ wird auch euklidisches oder inneres Produkt genannt und als $\langle u, v \rangle_e = \underline{u \cdot v}$ geschrieben.

Fasst man Vektoren $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenmatrizen $u = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T, v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ auf, so ist

$$\langle u, v \rangle_e = \underline{u \cdot v} = \underline{u^T v}.$$

Damit gelten für Addition, Skalarmultiplikation und Skalarprodukt die Rechenregeln i) – ix) aus Satz I.5.

NB $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ ist nicht assoz., da für $n \geq 2$ und $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ schon der Ausdruck $(u \cdot v) \cdot w$ sinnlos ist.

Satz IV.1 Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt:

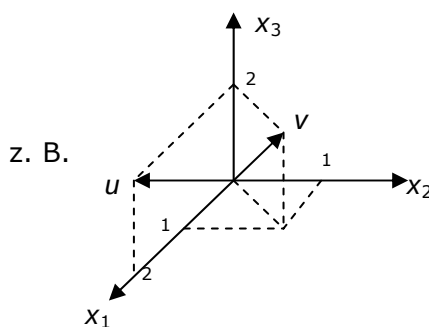
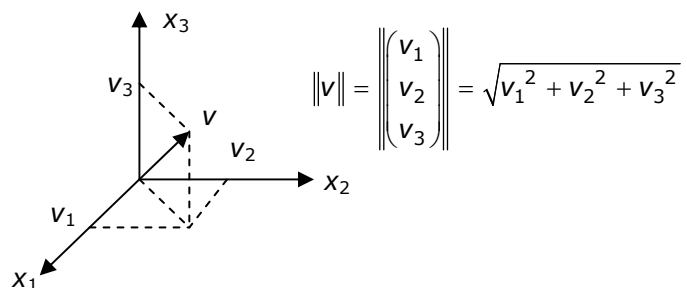
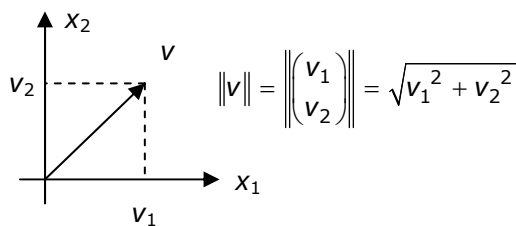
- i) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$, $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$, $(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k(u \cdot v)$;
wegen Satz I.5
- ii) $u \cdot v = v \cdot u$; wegen $\sum u_i v_i = \sum v_i u_i$ iii) $v^2 := v \cdot v \geq 0$; wegen $\sum v_i^2 \geq 0$
- iv) $v^2 = 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow v = 0 \in \mathbb{R}^n$; wegen $\sum v_i^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$

Def. i) Eukl. Norm (Länge, Betrag) eines Vektors $\|v\|_e := \sqrt{v \cdot v}$, d. h. $\|v\|_e^2 = v^2$

ii) Eukl. Abstand zweier Vektoren $d_e(u, v) := \|u - v\| = \sqrt{(u - v)^2}$

(Der Index e wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels weggelassen, da hier alles "euklidisch" ist.)

NB Schaut man auf $\mathbb{R}^2$ oder in $\mathbb{R}^3$, so ist der Satz des Pythagoras erkennbar und die Norm $\|v\|$ als Länge des Pfeils (Vektors) v offensichtlich.



$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \|u\| = \sqrt{8}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|v\| = \sqrt{6}$$

$$d(u, v) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

NB $d(u, v) = \|u - v\| = \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$ euklid. Abstand im $\mathbb{R}^n$

Satz IV.2 Ungleichung von Cauchy u. Schwarz

$$\bigwedge_{u, v \in \mathbb{R}^n} |u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|,$$

wobei $|k| = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ -k, & k \leq 0 \end{cases}$ der Betrag von $k \in \mathbb{R}$ ist.

Bew.: Für $v = 0 \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen $u \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$ und $\|0\| = 0$ die Gleichheit.

Setze für $v \neq 0$ $k = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$; also

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Satz IV.1}}{\leq} (u - kv)^2 = u^2 - 2k(u \cdot v) + k^2 v^2 = \|u\|^2 - 2 \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} (u \cdot v) + \left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \right)^2 \|v\|^2 = \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2} \\ &\Rightarrow 0 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \Rightarrow (u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit den Regeln für das $\sqrt{\quad}$ -adizieren in $\mathbb{R}$ die Behauptung.

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung kann geschrieben werden als $-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$, und

für $u, v \neq 0$ als $-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$. Das ermöglicht formal die

Def. Winkel zweier Vektoren für $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u, v \neq 0$

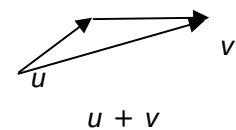
$$\cos \varphi := \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{d. h.} \quad \varphi = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Die geometrische Rechtfertigung dafür später.

Satz IV.3 $u, v, w \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$

- i) $\|v\| \geq 0, d(u, v) \geq 0$ ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
 iii) $\|kv\| = |k|\|v\|, d(u, v) = d(v, u)$ iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Dreiecksungleichung(en)



Bew.: i), ii) folgen sofort aus Satz IV.1 und der $\sqrt{\quad}$ -Eigenschaft in $\mathbb{R}$.

iii) $\|kv\|^2 = (kv) \cdot (kv) = k^2 v \cdot v = k^2 \|v\|^2$ und damit ist auch
 $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |-1| \|v - u\| = d(v, u).$

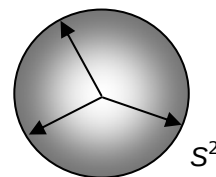
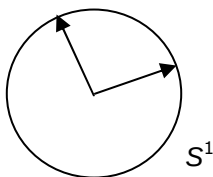
iv) $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u^2 + 2(u \cdot v) + v^2$
 $\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + v^2 \stackrel{\text{Satz IV.2}}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

Da $|x| \geq 0$, bleibt nach $\sqrt{\quad}$ -Zeichen die Ungleichung erhalten, und damit ist auch
 $d(u, v) = \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v).$

Def. Ein $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Einheitsvektor, wenn $\|v\| = 1$ ist.

NB Jeder Vektor $v \neq 0$ lässt sich auf Länge 1 bringen durch $\frac{1}{\|v\|} v =: v^0 :=$ Einheitsvektor in

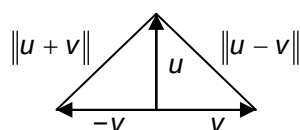
Def. Einheitssphäre $S^{n-1} := \{v \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}$ "Richtung" v.



Def. $u, v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal $\Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

NB i) $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ Satz des Pythagoras (Bew. Übung)

ii) Die Vorstellung von "u senkrecht auf v" entspricht dem Bild mit der Aussage $\|u + v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow u \perp v$, deren Richtigkeit gezeigt ist mit



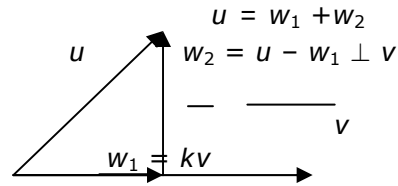
$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u^2 + 2(u \cdot v) + v^2$$

$$\text{und } \|u - v\|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = u^2 - 2(u \cdot v) + v^2$$

$$\text{durch } \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4(u \cdot v)$$

$$\text{bzw.} \quad \| \quad = \quad \| \quad \Leftrightarrow u \cdot v = 0.$$

Def. Orthogonalprojektion $\text{proj}_v u = w_1$
eines Vektors u auf einen anderen $v \neq 0$:



Der Skalar k ist eindeutig und damit auch w_1 und w_2 , denn:

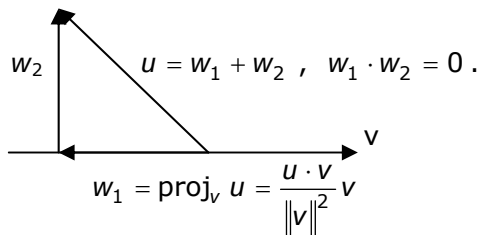
$$w_1 = kv, \quad w_1' = k'v \quad \text{mit} \quad (u - w_1) \cdot v = 0 = (u - w_1') \cdot v \quad \text{ergibt} \quad u \cdot v = w_1 \cdot v, \quad u \cdot v = w_1' \cdot v$$

und damit $(kv) \cdot v = (k'v) \cdot v$ d. h. $k(v \cdot v) = k'(v \cdot v)$, woraus wegen $v \neq 0$ $k = k'$ folgt.

Wegen $u \cdot v = (w_1 + w_2)v = w_1v = kv^2$ ist $k = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$, und damit

$$w_1 = \text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \left(u \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|} = (u \cdot v^0) v^0.$$

Damit lässt sich also jeder Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ eindeutig zerlegen in zwei orthogonale Vektor-komponenten w_1, w_2 , wobei w_1 die von einem $v \in \mathbb{R}^n$ vorgegebene "Richtung" hat, d. h.



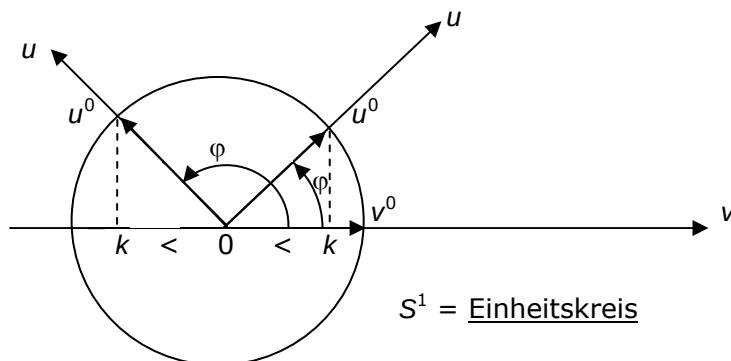
z. B. $u = (3, 1, -7), \quad v = (1, 0, 5), \quad u \cdot v = 3 + 0 + (-35) = -32, \quad \|v\|^2 = 1^2 + 0^2 + 5^2 = 26$

$$w_1 = \text{proj}_v u = -\frac{16}{13}(1, 0, 5), \quad w_2 = u - w_1 = \frac{1}{13}(39, 13, -91) + \frac{1}{13}(16, 0, 80) = \frac{1}{13}(55, 13, -11)$$

Probe:

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{16}{13^2}(55 + 0 - 55) = 0, \quad w_1 + w_2 = \frac{1}{13}((-16, 0, -80) + (55, 13, -11)) = \frac{1}{13}(39, 13, -91) = u$$

Damit zeigt sich neben der Länge $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ die zweite elementar-geometrische (Be-)Deutung des Skalarprodukts.



$$\cos \varphi = k = u^0 \cdot v^0 = \frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|}, \quad \text{d. h.} \quad \underline{\underline{u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \varphi}} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \arccos \left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Eine Besonderheit des $\mathbb{R}^3$

Def. Kreuz- bzw. Vektorprodukt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

z. B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-5, 10, -5)$

NB Die Anwendung des Entwicklungssatzes II.10 ergibt für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\det(u \ v \ w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (u \times v) \cdot w =: [u \ v \ w]$$

Def. $[u \ v \ w]$ heißt Spatprodukt der drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Satz IV.4 $u, v \in \mathbb{R}^3, \quad k \in \mathbb{R}$

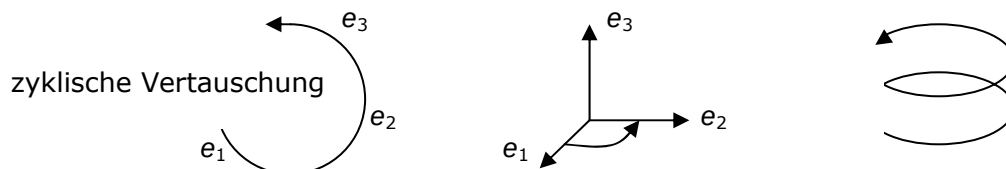
- i) $u \times v \perp u, v$ ii) $u \times v = -(v \times u)$ schiefssymmetrisch
iii) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w), (u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
iv) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$ v) $0 \times u = u \times 0 = 0 = u \times u$
vi) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$ Lagrange-Identität

Bew.: i) – v) Anwendung der Regeln für die Determinante
vi) Ausrechnen beider Seiten der Gleichung

Für die Standard-Basisvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

i)
$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ii) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$



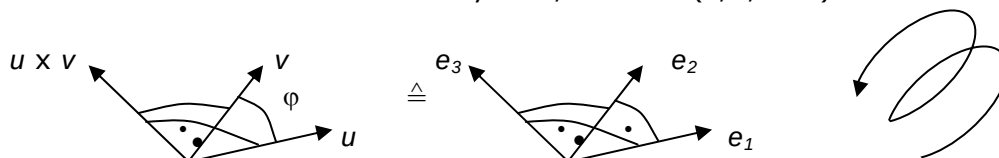
e_1, e_2, e_3 bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem : $\Leftrightarrow \det(e_1 \ e_2 \ e_3) > 0$.

NB i) Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ, denn z. B. $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0$,

$$\text{aber } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_2.$$

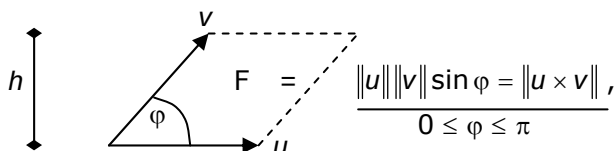
- ii) Analog zu $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$ hat man ein Kriterium für die Parallelität zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3, u, v \neq 0$, durch: $u \parallel v \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{R}} u = kv \Leftrightarrow u \times v = 0$, denn
 $\Rightarrow$: $u = kv \Rightarrow u \times v = (kv) \times v = k(v \times v) = k \cdot 0 = 0$. $\Leftarrow$ Übung

- iii) Der Vektor $u \times v$ mit $|u \times v| \neq 0$ ist eindeutig bestimmt durch
 α) $u, v \perp u \times v$ β) $u, v, u \times v$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, d. h. $\det(u, v, u \times v) > 0$



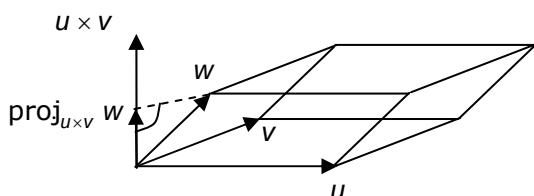
Zur genaueren Klärung siehe Literatur zum Stichwort "Orientierung".

- γ) $\|u \times v\|$ = Flächeninhalt des durch u, v aufgespannten Parallelogramms, denn



$$\begin{aligned} \text{wegen } F &= \|u\| h = \|u\| \|v\| \sin \varphi = \|u\| \|v\| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{(\|u\| \|v\|)^2 - (\|u\| \|v\| \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2} \stackrel{\text{Satz IV.4}}{=} \sqrt{\|u \times v\|^2} = \|u \times v\| \end{aligned}$$

- iv) Geometrische Interpretation des Spatprodukts $\det(u, v, w) = [u, v, w] = (u \times v) \cdot w$



Für das Volumen V des durch u, v, w aufgespannten Parallelepipedes gilt

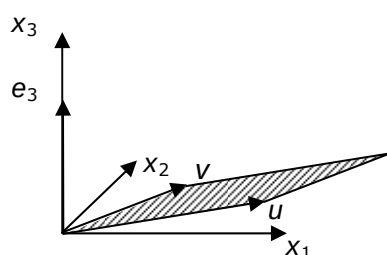
$$V = |[u, v, w]|,$$

$$\begin{aligned} \text{denn } V &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \|u \times v\| \|\text{proj}_{u \times v} w\| = \|u \times v\| \left\| \frac{w \cdot (u \times v)}{\|u \times v\|^2} (u \times v) \right\| \\ &= \|u \times v\| \left| \frac{w \cdot (u \times v)}{\|u \times v\|^2} \right| \|u \times v\| = |(u \times v) \cdot w| = |[u, v, w]| \end{aligned}$$

Man erhält also offensichtlich: u, v, w liegen in einer Ebene $\Leftrightarrow [uvw] = 0$

Wie eine dreireihige Determinante via $[u, v, w]$ das Volumen eines Parallelepipedes misst, so drückt eine zweireihige wegen

$$F = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \text{ den } \underline{\text{Flächeninhalt}} \text{ eines Parallelogramms aus,}$$



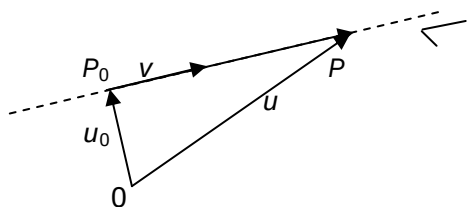
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denn die Maßzahl für das Volumen des von u', v', e_3 aufgespannten Parallelepipeds mit Höhe 1 ist gleich der Maßzahl seiner Grundfläche.

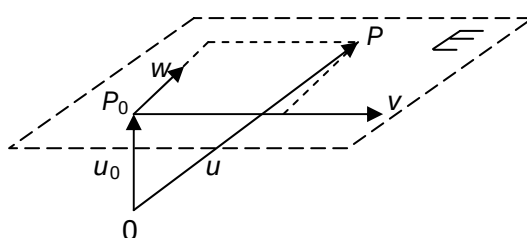
Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Def. Gerade $L := \{u \mid u = u_0 + tv, t \in \mathbb{R}\}$ mit $u_0, v \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ und $v \neq 0$

Ebene $E := \{u \mid u = u_0 + tv + sw; t, s \in \mathbb{R}\}$ mit $u_0, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $v \times w \neq 0$



$$u = u_0 + tv$$



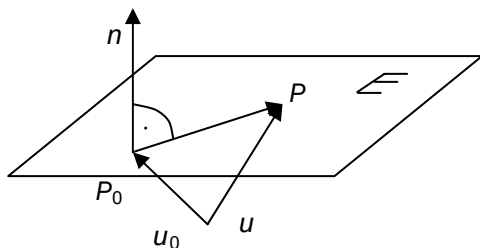
$$u = u_0 + tv + sw$$

Parametergleichungen

u, u_0 heißen hier Ortsvektoren der durch ihre Komponenten beschriebenen Punkte P_0, P .

v, w werden hier Richtungsvektoren genannt.

Wegen $(v \times w) \cdot u = (v \times w)(u_0 + tv + sw) = (v \times w) \cdot u_0 = d$ erhält man einen Normalvektor $n = v \times w$, der mit der Normalengleichung $n(u - u_0) = 0$ bzw. $nu = nu_0 = d$ die Ebene $E : u = u_0 + tv + sw$ beschreibt.



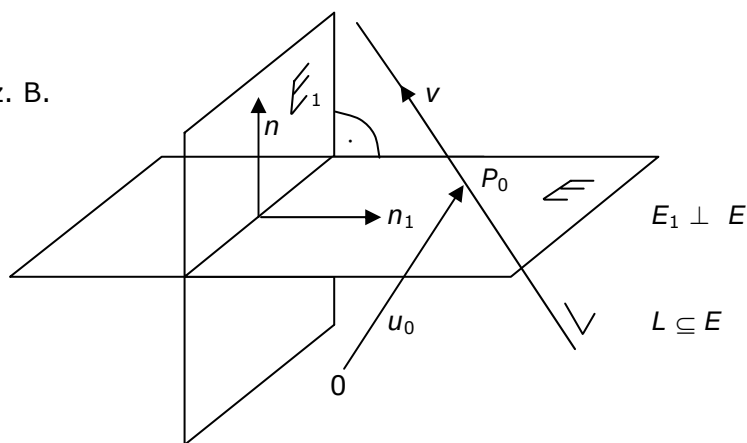
$$E = \{u \mid n \cdot u = d, u \in \mathbb{R}^3\} \text{ mit } n \in \mathbb{R}^3, n \neq 0, d \in \mathbb{R}$$

Umgekehrt lässt sich aus der Normalengleichung $n \cdot u = d$ durch geeignete Wahl von $v, w \perp n$ und u_0 mit $nu_0 = d$ die Parametergleichung der Ebene herleiten. (Übung)

Eine dritte Form der Ebenengleichung ist mit $n = (a, b, c) \neq 0, u = (x, y, z)$ und $d \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$ax + by + cz = d.$$

z. B.



Gesucht wird $E : n \cdot u = d$

mit: E verläuft senkrecht zu $E_1 : 2x - 4y + 2z = 9$

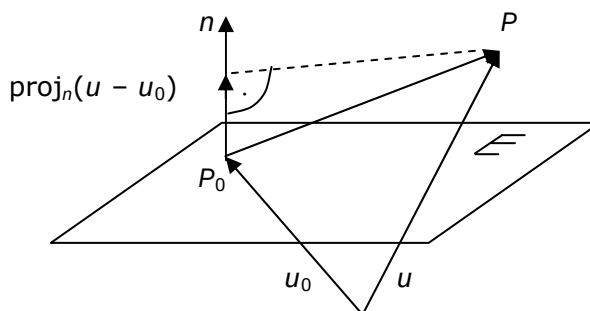
und enthält $L : u = u_0 + tv = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für E soll also gelten: $n \cdot n_1 = 0$ oder $n = n_1 \times v$, mit $n \cdot u_0 = d$.
 $n \cdot v = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow n = (0, k, 2k) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 9k \Rightarrow E : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} u = 9$$

Abstand : Punkt-Ebene

$$\begin{aligned} E : nu &= d \\ P_0 &\in E, P \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$



$$D = \|\text{proj}_n(u - u_0)\| = \left\| \frac{(u - u_0) \cdot n}{\|n\|^2} n \right\| = \frac{1}{\|n\|} |(u - u_0) \cdot n| = \frac{1}{\|n\|} |u \cdot n - d|$$

$$\text{z. B. } P(1, -4, -3), E : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} u = -1 \quad D = \frac{1}{7} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \right| = \frac{3}{7}$$

2. Lineare Transformationen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Def. Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt lineare Transformation,

wenn sie additiv und homogen ist

d. h. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ $T(cu) = cT(u)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

NB Mit $T(u) := Au, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist wegen $A(u + v) = Au + Av, A(cu) = cAu$ jede Matrix als lin. Transf. interpretierbar.

Andererseits lässt sich jede lin. Transf. durch eine Matrix beschreiben anhand vom

Darstellungssatz IV.5

Für eine lin. Transf. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt: $T(u) = Au$ mit $A := [T] := (T(e_1) \cdots T(e_n))$, d.h.,

die Spalten der Standarddarstellungsmatrix $A = [T]$ sind die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Bew.:

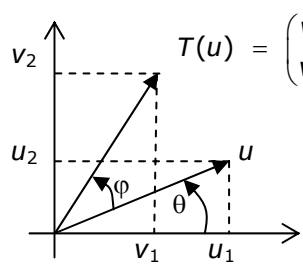
$$T(u) = T((u_1, \dots, u_n)) = T(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) = u_1 T(e_1) + \dots + u_n T(e_n) = (T(e_1) \cdots T(e_n)) (u_1 \cdots u_n)^T = Au$$

Eine lin. Transf. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt linearer Operator auf $\mathbb{R}^n$. Wichtige lin. Operatoren auf $\mathbb{R}^n$ sind Projektionen, Drehungen, Spiegelungen, Kompressionen und Expansionen.

z. B. i) Projektion auf x,y-Ebene $T(e_1) = e_1, T(e_2) = e_2, T(e_3) = 0 \in \mathbb{R}^3$

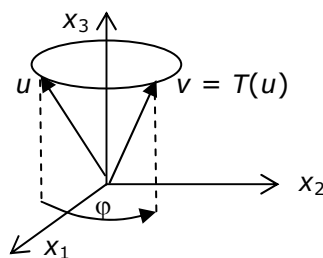
$$[T] = (T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Drehung im $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ um 0 : Mit $\|T(u)\| = \|u\|$ erhält man



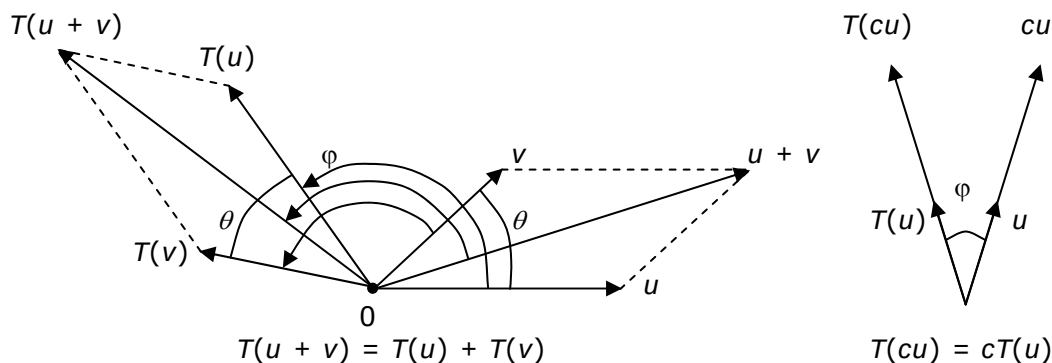
$$\begin{aligned} T(u) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|u\| \cos(\varphi + \theta) \\ \|u\| \sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|u\| (\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) \\ \|u\| (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \end{pmatrix} \\ &\quad \text{Additions-} \\ &\quad \text{theoreme} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|u\| \cos \theta \\ \|u\| \sin \theta \end{pmatrix} = D_\varphi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = D_\varphi u \\ D_\varphi &= [T] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eingebettet im $\mathbb{R}^3$ bedeutet dies gerade die Drehung eines Punktes um die x_3 -Achse durch den Winkel φ .



$$[T] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NB Zur Drehung in der Ebene



$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

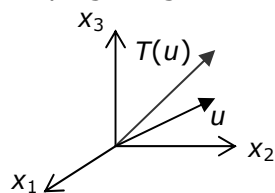
$$T(cu) = cT(u)$$

T ist längen- und winkelerhaltend, d. h. $\|T(u)\| = \|u\|$ und $\theta(u, v) = \theta(T(u), T(v))$.

NB Eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ bzgl. einer Achse durch $0 \in \mathbb{R}^3$ um einen Winkel φ lässt ebenfalls die Länge von und Winkel zwischen den Vektoren unverändert, woraus auch hier die Linearität folgt. Also lässt sich jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ durch eine 3x3-Matrix darstellen.

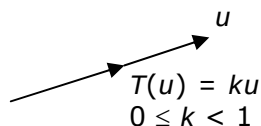
Dazu z. B.: Dan Kalman: *The Axis of Rotation: Analysis, Algebra, Geometry*; *Mathematics Magazine*, Vol. 62, Nr. 4, Okt. 1989.

iii) Spiegelung z. B. an der x_2, x_3 -Ebene

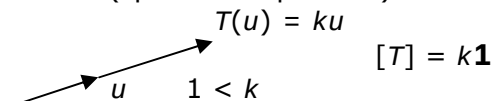


$$[T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Kontraktion (spezielle Kompression)



Dilation (spezielle Expansion)



$$[T] = k\mathbf{1}$$

Komposition (Hintereinanderausführen) von linearen Transformationen

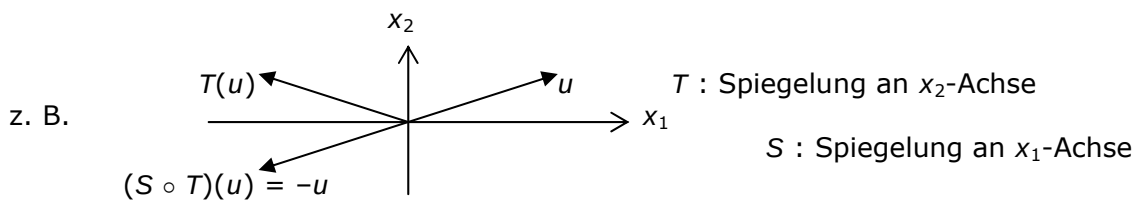
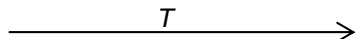
$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^r \xrightarrow{S} \mathbb{R}^m \quad [T] = A, \quad [S] = B$$

$$u \mapsto T(u) \mapsto S(T(u)) =: (S \circ T)(u) \quad \text{S nach T}$$

$$u \mapsto Au \mapsto B(Au) = (BA)u, \text{ wegen Assoz. nach Satz I.5}$$

$$\text{Also ist } [S \circ T] = BA = [S][T]$$

Für $\xrightarrow{T_1} \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_n}$ hat man also $[T] = [T_n \circ \dots \circ T_2 \circ T_1] = [T_n] \cdots [T_2][T_1]$.



z. B.

T : Spiegelung an x_2 -Achse

S : Spiegelung an x_1 -Achse

$$[S \circ T] = [S][T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1} \quad S \circ T : \text{Drehung um } 180^\circ$$

NB Es gilt also $[T^{-1}] = [T]^{-1}$, da $\mathbf{1} = [T \circ T^{-1}] = [T][T^{-1}]$

V. Kapitel – Allgemeine Vektorräume

1. Vektorräume

Die Rechenregeln aus Satz I.5, i) – iv) und vi)② – ix) für Matrizen und damit auch für die Addition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^n$ (Kap. IV) werden nun als Axiome an den Anfang gesetzt zur

Def. eines K-Vektorraums V bzw. eines Vektorraums V über K

Für eine Menge $V \neq \emptyset$ und einen Körper K sei definiert eine

Addition	und eine	Skalarmultiplikation
$V \times V \rightarrow V$	innere	$K \times V \rightarrow V$
$(u, v) \mapsto u + v$	Verknüpfung	$(k, v) \mapsto kv$
		äußere Verknüpfung

V heißt K-Vektorraum wenn gilt

$$\text{VR}_1: \quad \text{i)} \quad \bigwedge_{u, v, w \in V} (u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{ii)} \quad \bigvee_{e \in V} \bigwedge_{u \in V} u + e = u$$

$$\text{iii)} \quad \bigwedge_{u \in V} \bigvee_{v \in V} u + v = e \quad \text{iv)} \quad \bigwedge_{u, v \in V} u + v = v + u;$$

d. h., $(V, +)$ ist eine (kommutative) abelsche Gruppe.

$$\text{VR}_2: \quad \text{v)} \quad \bigwedge_{k, l \in K} \bigwedge_{u \in V} (kl)u = k(lu) \quad \text{vi)} \quad \bigwedge_{k, l \in K} \bigwedge_{u \in V} (k + l)u = ku + lu$$

$$\text{vii)} \quad \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{u, v \in V} k(u + v) = ku + kv \quad \text{viii)} \quad \bigwedge_{u \in V} 1u = u$$

- NB** i) Es gibt also zwei Additionen, nämlich in K und in V , und zwei Multiplikationen, nämlich in K und auf V , die symbolisch aber nicht unterschieden werden.
- ii) Der Nullvektor $e \in V$ ist eindeutig wegen $e' = e' + e = e + e' = e$ und wird mit $e = 0$ bezeichnet, wie die Null aus K .
Für jedes u ist der Vektor v mit $u + v = 0$ ebenfalls eindeutig wegen $v' = v' + 0 = v' + (u + v) = (v' + u) + v = v + (u + v') = v + 0 = v$, und wird mit $v = -u$ bezeichnet und negativer Vektor genannt; also $u + (-u) = 0$.

Satz V.1 Für alle $k \in K, u \in V$ eines K -VR's V gilt:

$$\text{i)} \quad 0u = 0 \quad \text{ii)} \quad k0 = 0 \quad \text{iii)} \quad (-1)u = -u \quad \text{iv)} \quad ku = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ oder } u = 0$$

$$\text{Bew.: z. B. i)} \quad 0u = (0 + 0)u = 0u + 0u \Rightarrow 0 = 0u + (-0u) = (0u + 0u) + (-0u) = 0u + (0u + (-0u)) = 0u + 0 = 0u$$

$$\text{iii)} \quad u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0, \text{ also ist } -u = (-1)u \text{ wegen der Eindeutigkeit des negativen Vektors bzw. des zu } u \text{ additiv inversen Elements } -u.$$

Differenz zweier Vektoren $u - v := u + (-v)$

Beispiele für K-Vektorräume

$$\text{i)} \quad V = \mathbb{R}^n \text{ ist } \mathbb{R}\text{-VR, der Prototyp (Kap. IV)} \quad \text{ii)} \quad V = K^{m \times n} \text{ ist } K\text{-VR (Kap. I)}$$

Aber: $V = \mathbb{R}^2$ mit üblicher Addition und der äußeren Verknüpfung $ku = k(u_1, u_2) := (ku_1, 0)$ hat keine Vektorraumstruktur, denn für $u_2 \neq 0$ ist $1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u$.

- iii) Jede Ebene durch Null, d. h. $E : n \cdot u = 0$ (Normalengleichung) im $\mathbb{R}^3$ ist $\mathbb{R}$ -VR mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, denn es gilt
- $\alpha)$ $n \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$
- $\beta)$ $u, v \in E \Rightarrow n \cdot u = 0, n \cdot v = 0 \Rightarrow n \cdot (u + v) = n \cdot u + n \cdot v = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in E$
- $\gamma)$ $k \in \mathbb{R}, u \in E \Rightarrow n \cdot (ku) = k(n \cdot u) = k0 = 0 \Rightarrow ku \in E$
- Die Axiome VR_1, VR_2 sind erfüllt, denn ... (Übung)
- iv) $V = F(-\infty, \infty) :=$ Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ -VR mit punktwiser Definition der Addition $f + g : (f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $kf : (kf)(x) := kf(x)$. (Übung)

Def. Ist $K = \mathbb{R}$, so wird V reeller Vektorraum genannt

- v) $V = P(M) =$ Potenzmenge einer Menge M , $K = \{0, 1\}$ (der kleinste Körper)
- $A + B := A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ symmetrische Differenz
- mit $1A := A, 0A := \emptyset$.

- VR_1 i) Assoz. (Übung) ii) $0 = \emptyset$ iii) $-A = A$ iv) $A \Delta B = B \Delta A$
- VR_2 v) ... vi) $(1+1)A = 0A = \emptyset = A + A = 1A + 1A$
 $(1+0)A = \dots = 1A + 0A$ u. s. w.
- vii) $0(A+B) = \emptyset = \emptyset + \emptyset = 0A + 0B$ u. s. w. viii) ...

2. Unterräume

Def. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ eines K -Vektorraums V heißt Unter(vektor)raum von V , wenn W mit der "geerbten" Addition und Skalarmultiplikation selbst ein K -VR ist.

Für den Nachweis der Unterraumeigenschaft einer nicht leeren Teilmenge $W \subseteq V$ reicht es aus, die Abgeschlossenheit der beiden geerbten Operationen bzgl. W zu zeigen, d. h.

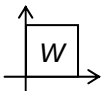
Satz V.2 Sei V ein K -VR; dann ist $W \subseteq V$ ein UVR von V , wenn gilt

- $\alpha)$ $W \neq \emptyset$ $\beta)$ $\bigwedge_{u,v \in W} u + v \in W$ $\gamma)$ $\bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{u \in W} ku \in W$

Bew.: Da die Vektorraum-Axiome i), iv) – viii) für alle $u, v, w \in V$ und alle $k, l \in K$ gelten, sind sie automatisch für alle $u, v, w \in W$ und alle $k, l \in K$ erfüllt.

Mit einem $u \in W$, da $W \neq \emptyset$, und $k = 0$ ist auch aufgrund von Satz V.1 $0 \in W$, da $0 = 0u \in W$, d. h. Axiom ii) erfüllt; ebenso Axiom iii), da mit $k = -1$ für alle $u \in W$ auch $-u = (-1)u \in W$ ist.

- z. B. i) $\{0\}$, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ durch Null und $\mathbb{R}^3$ selbst sind UVR von $\mathbb{R}^3$.

Aber:  $W \subseteq \mathbb{R}^2$
 W ist mit üblicher Addition und Skalarm. kein UVR von $\mathbb{R}^2$.

- ii) $\{A \mid A^T = A \in K^{n \times n}\}$ ist UVR von $K^{n \times n}$, ebenso die Menge der unteren, der oberen Dreiecksmatrizen und der Diagonalmatrizen aus $K^{n \times n}$.
- iii) $P_n = \left\{ p \mid p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$ ist UVR vom $\mathbb{R}$ -VR $C(-\infty, \infty) = \{f \mid f \in F(-\infty, \infty), f \text{ stetig}\}$ und $C(-\infty, \infty)$ ist seinerseits auch UVR von $F(-\infty, \infty)$.

Gleiches gilt auch, wenn der Definitionsbereich der Funktionen nicht $(-\infty, \infty)$ ist, sondern z. B. Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (s. Analysis).

Satz V.3 Für $A \in K^{m \times n}$ ist die Lösungsmenge Lös(A | 0) des homog. LGS's $Ax = 0$ ein UVR von K^n .

Bew.: $\alpha)$ $0 \in \text{Lös}(A|0)$
 $\beta)$ $x, y \in \text{Lös}(A|0) \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x+y \in \text{Lös}(A|0)$
 $\gamma)$ $k \in K, x \in \text{Lös}(A|0) \Rightarrow A(kx) = kAx = k0 = 0 \Rightarrow kx \in \text{Lös}(A|0)$

Zur Bezeichnungsweise: Bis auf Weiteres ist mit V immer ein K -Vektorraum gemeint.

Def. Ein Vektor $u \in V$ heißt Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$, wenn es Skalare $k_1, \dots, k_r \in K$ gibt mit $u = k_1 v_1 + \dots + k_r v_r$.

NB i) u ist Linearkombination von $v \Leftrightarrow \bigvee_{k \in K} u = kv$.

ii) Jeder Vektor $u \in K^n$ ist Linearkomb. der Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n \in K^n$, denn $u = (u_1, \dots, u_n) = (u_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, u_n) = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$.

iii) $u \in K^m$ ist Linearkomb. von $v_1, \dots, v_n \in K^m \Leftrightarrow \underset{\text{LGS}}{(v_1 \ \dots \ v_n)} \underset{A}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{x}{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}} = \underset{u}{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}}$ ist lösbar. $A \in K^{m \times n}$

iv) Jede Lineark. von Vektoren aus einem Unterraum $W \subseteq V$ liegt wieder in W .

Def. Für $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ wird $\text{span}(S) := \{k_1 v_1 + \dots + k_r v_r \mid k_i \in K\}$, d. h. die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus S , **lineare Hülle von S** benannt.

Satz V.4 Für $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ gilt:

- i) $\text{span}(S)$ ist UVR von V
- ii) $\text{span}(S)$ ist der kleinste UVR von V , der S enthält, d. h.,
 W ist UVR von V und $S \subseteq W \Rightarrow \text{span}(S) \subseteq W$.

Bew.: i) $\alpha) \quad 0 = 0v_1 + \dots + 0v_r \in \text{span}(S)$
 $\beta) \quad u, w \in \text{span}(S) \Rightarrow u + w = \sum_{i=1}^r k_i v_i + \sum_{i=1}^r l_i v_i = \sum_{i=1}^r (k_i + l_i) v_i \in \text{span}(S)$

$$\gamma) \quad k \in K, \ u \in \text{span}(S) \Rightarrow ku = k \sum_{i=1}^r k_i v_i = \sum_{i=1}^r (kk_i) v_i \in \text{span}(S)$$

ii) $S \subseteq \text{span}(S)$, wegen $v_i = 0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_r$; wenn $u \in \text{span}(S)$ ist, so auch $u = \sum_{i=1}^r k_i v_i \in W$, da nach Vor. $v_i \in S \subseteq W$ und W UVR ist.

Def. $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ heißt Erzeugendensystem (EZS) des UVR's $W \subseteq V$, wenn $\text{span}(S) = W$ ist.

z. B. i) $S = \{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $v_1 \times v_2 \neq 0$ ist EZS einer Ebene E durch Null,
d. h. $\text{span}\{v_1, v_2\} = E \subseteq \mathbb{R}^3$.

ii) $\text{span}\{1, x, \dots, x^n\} = P_n \subseteq F(-\infty, \infty)$

Wann verschiedene Systeme (Mengen) S, S' von Vektoren denselben Vektorraum erzeugen, besagt

Satz V.5 $\text{span}(S) = \text{span}(S') \Leftrightarrow S \subseteq \text{span}(S') \text{ und } S' \subseteq \text{span}(S).$

d. h. S und S' spannen denselben UVR auf $\Leftrightarrow$ Jeder Vektor aus S ist Linearkombination von Vektoren aus S' , und jeder ...

Bew. Übung

3. Lineare Unabhängigkeit

Def. Die Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ heißen bzw. das System $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn die Gleichung $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = 0$ nur die triviale Lösung $k_1 = \dots = k_r = 0$ hat, andernfalls linear abhängig.

NB $\{v_1, \dots, v_r\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow$ Es existieren $k_1, \dots, k_r \in K$, die nicht alle Null sind, bzw. es existiert $0 \neq (k_1, \dots, k_r) \in K^r$, mit $\sum_{i=1}^r k_i v_i = 0$.

- z. B. i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^n$ ist lin. unabh., denn $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ \vdots \\ k_n = 0 \end{matrix}$.
- ii) lin. unabh. ist $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\det(v_1 \ v_2) \neq 0$, ebenso $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{Q}^3$ mit $\det(v_1 \ v_2 \ v_3) \neq 0$, denn man hat mit $A = (v_1 \ \dots \ v_n) \in K^{n \times n}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in K^n$: $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0 \Leftrightarrow Ak = 0$.
- iii) $\{1, x, \dots, x^n\} \subseteq P_n$ ist lin. unabh., denn die Gleichung $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0 \in P_n$ besagt, dass das Polynom $p(x)$ mehr als n verschiedene Nullstellen hat, nämlich alle $x \in \mathbb{R}$, was nach dem Fundamentalsatz der Algebra nur für das Nullpolynom sein kann; also ist $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

Ein Kriterium für lin. Unabhängigkeit liefert

Satz V.6 Für $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ mit $r \geq 2$ gilt: S lin. abh. $\Leftrightarrow \bigvee_{v_i \in S} v_i \in \text{span}(S \setminus \{v_i\})$
bzw. S lin. unabh. $\Leftrightarrow$ kein Vektor aus S lässt sich als Linearkomb. der anderen aus S darstellen.

Bew.: " $\Rightarrow$ " Da es nach Def. ein $k = (k_1, \dots, k_r) \neq 0$ gibt mit $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = 0$, kann nach einem $v_i \in S$ aufgelöst werden, sodass $v_i = -\frac{k_1}{k_i} v_1 - \dots - \frac{k_r}{k_i} v_r \in \text{span}(S \setminus \{v_i\})$ ist.

" $\Leftarrow$ " Aus $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r k_j v_j \in \text{span}(S \setminus \{v_i\})$ erhält man eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors, nämlich $k_1 v_1 + \dots + (-1)v_i + \dots + k_r v_r = 0$.

- NB** i) $\{0\}$ ist linear abhängig ii) $0 \in S \Rightarrow S$ ist linear abhängig
- iii) v_1, v_2 linear abhängig $\Leftrightarrow \bigvee_{k \in K} v_1 = k v_2$ oder $v_2 = k v_1$
- iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind lin. abh., aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$, d. h., nicht jeder Vektor einer lin. abh. Menge muss Linearkombination der anderen sein.
- v) Für $r > n$ ist $v_1, \dots, v_r \in K^n$ linear abhängig, da das homog. LGS $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = 0$ mehr Variablen $k_i \in K$ als Gleichungen hat und somit nach Satz I.3 eine nichttriviale Lösung $k = (k_1, \dots, k_r) \neq 0$ besitzt.
- vi) Eine Anwendung der linearen Unabhängigkeit ist der Koeffizientenvergleich, z. B. im $\mathbb{R}$ -VR P_n mit $S = \{1, x, \dots, x^n\}$

Die Wronski-Determinante

Angenommen, $f_1, f_2 \in F(-\infty, \infty)$ sind differenzierbar und linear abhängig, dann existiert

$$0 \neq (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } k_1 f(x) + k_2 f_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{und daher auch } k_1 f'(x) + k_2 f_2'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist dann k_1, k_2 eine nichttriv. Lösung des homog. LGS's. Nach Satz I.12, II.7

ist also die Determinante der Koeffizientenmatrix $W(x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Umgekehrt folgt also aus $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} W(x) \neq 0$ die lin. Unabhängigkeit von f_1, f_2 ,

$$\text{z. B. } f_1(x) = x, f_2(x) = \sin x; W(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \sin x \neq 0, \text{ für z. B. } x = \pi.$$

Mit denselben Argumenten erhält man allgemein den

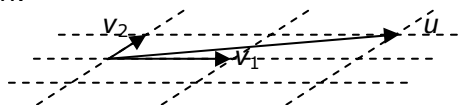
Satz V.7 Unter den notwendigen Voraussetzungen gilt:

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow f_1, \dots, f_n \text{ lin. unabh.}$$

Wronski-Determinante

4. Basis. Dimension

Auch mit schiefwinkligen Koordinatensystemen lässt sich jeder Punkt z. B. einer Ebene eindeutig darstellen.



$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

$$v_1, v_2 \text{ lin. unabh.}$$

Das führt allgemein zur

Def. $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn gilt: i) S ist lin. unabh. ii) $\text{span}(S) = V$, d. h., wenn S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (EZS) von V ist.

Satz V.8 Ist $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis von V , so lässt sich jeder Vektor $u \in V$

$$\text{eindeutig darstellen als } u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \sum_{i=1}^n k_i v_i, \quad k_i \in K.$$

Bew.: Die Existenz einer Darstellung garantiert $V = \text{span}(S)$, und die Eindeutigkeit ist gezeigt

$$\begin{aligned} \text{mit : } u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n, \quad u = l_1 v_1 + \dots + l_n v_n &\Rightarrow 0 = u - u = \sum_{i=1}^n k_i v_i - \sum_{i=1}^n l_i v_i = \sum_{i=1}^n (k_i - l_i) v_i \\ &\Rightarrow k_i - l_i = 0, \text{ also } k_i = l_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n. \\ &v_1, \dots, v_n \text{ lin. unabh.} \end{aligned}$$

Lemma V.9

Für $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, $S' = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ gilt:

$\text{span}(S) = V$ und $\#(S) < \#(S') \Rightarrow S'$ linear abhängig,

d. h., mehr Vektoren, als irgendein EZS hat, sind linear abhängig.

Bew.: Wegen $\text{span}(S) = V$ lassen sich die $w_j \in S'$ darstellen als

$$w_1 = \sum_{i=1}^n c_{i1} v_i, \dots, w_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i, \dots, w_m = \sum_{i=1}^n c_{im} v_i$$

Nun ist für die lin. Abhängigkeit von S' die Existenz einer nichttrivialen Lösung

$(k_1, \dots, k_m) \neq 0$ für die Gleichung $\otimes \sum_{j=1}^m k_j w_j = k_1 w_1 + \dots + k_m w_m = 0$ nachzuweisen.

Dazu wird folgendes homogene LGS betrachtet:

$$\begin{array}{ccccccc} c_{11}k_1 & + & \dots & + & c_{1m}k_m & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ c_{n1}k_1 & + & \dots & + & c_{nm}k_m & = & 0 \end{array} \quad \text{d. h.} \quad \otimes \sum_{j=1}^m c_{ij}k_j = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

Da nach Voraussetzung $m > n$ ist, hat das homog. LGS mehr Unbekannte als Gleichungen und folglich nach Satz I.3 eine nichttriviale Lösung $(k_1, \dots, k_m) \neq 0$. Dieses m -Tupel ist auch eine nichttriviale Lösung der obigen Gleichung $\otimes$, denn

$$\sum_{j=1}^m k_j w_j = \sum_{j=1}^m k_j \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} k_j v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} k_j v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} k_j \right) v_i \stackrel{\otimes}{=} \sum_{i=1}^n 0 v_i = 0 \quad \square$$

Theorem V.10 Für eine Basis $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ und eine Teilmenge $S' = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ gilt:

- i) $\#(S) < \#(S') \Rightarrow S'$ ist linear abhängig bzw. S' ist lin. unabh. $\Rightarrow \#(S') \leq \#(S)$,
d. h., eine Basis ist eine "maximale" lin. unabhängige Teilmenge von V , bzw. jede linear unabhängige Teilmenge von V enthält höchstens so viele Elemente wie eine Basis von V .
- ii) $\text{span}(S') = V \Rightarrow \#(S) \leq \#(S')$ bzw. $\#(S') < \#(S) \Rightarrow \text{span}(S') \subset V$,
d. h., eine Basis ist ein "minimales" Erzeugendensystem von V , bzw. eine Teilmenge von V mit weniger Vektoren als in einer Basis enthalten sind, spannt nicht den ganzen Vektorraum V auf.

Bew.: i) Folgt aus Lemma V.9, da für eine Basis definitionsgemäß $\text{span}(S) = V$ ist.
ii) Angenommen $\#(S) > \#(S')$, dann wäre mit der Voraussetzung $\text{span}(S') = V$ nach Lemma V.9 das System S linear abhängig, also keine Basis. Widerspruch!

Korollar V.11

Sind $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $S' = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basen von V , so ist $n = \#(S) = \#(S') = m$;
d. h., alle endlichen Basen eines Vektorraums haben dieselbe Anzahl von Vektoren.

Bew.: Aus Theorem V.10 folgt nach i) $\#(S') \leq \#(S)$, da S' linear unabhängig ist, und nach ii), $\#(S) \leq \#(S')$, da $\text{span}(S') = V$ ist, also die Gleichheit der Anzahlen.

Def. $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ sei Basis von $V \neq \{0\}$. Die Dimension von V ist definiert als
 $\dim(V) := \#(S) = n$.

Für $V = \{0\}$ wird als Basis $S = \emptyset$ gesetzt mit $\dim(\{0\}) := \#(\emptyset) = 0$.

Ein Vektorraum mit endlicher Basis, d. h. $\dim(V) \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, heißt endlichdimensional.

- NB**
- i) $\dim(K^n) = n$ mit Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq K^n$
 - ii) $\dim(K^{m \times n}) = m \cdot n$ mit Standardbasis $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \subseteq K^{m \times n}$,
wobei in der Matrix E_{ij} an der Stelle i, j eine 1 steht und sonst nur Nullen.
 - iii) $\dim(P_n) = n + 1$ mit Standardbasis $\{1, x, \dots, x^n\} \subseteq P_n$
 - iv) $F(-\infty, \infty), C(-\infty, \infty)$ sind nicht endlichdimensional, d. h. sie sind unendlichdimensional, da es für jedes $n \in \mathbb{N}$ $n + 1$ linear unabhängige Vektoren gibt, nämlich $1, x, x^2, \dots, x^n \in C(-\infty, \infty) \subseteq F(-\infty, \infty)$.

Def. Bzgl. einer Basis $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ heißen die k_i aus der eindeutigen Linearkombination
 $u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ Koordinaten von u und $\underline{(u)}_S := (k_1, \dots, k_n) \in K^n$ heißt

Koordinatenvektor von u bzgl. der Basis S .

$$\text{Also: } (u)_S = (k_1, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in K^n \Leftrightarrow u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \in V.$$

z. B. i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$, denn $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -1$, und für

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ist } (u)_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ der Koordinatenvektor bzgl. } S.$$

ii) $S = \{1, x, \dots, x^n\}$, $p \in P_n$, $(p)_S = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)_S = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$

Satz V.12 (Plus/Minus-Theorem) Für $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ gilt:

- i) S lin. unabh., $u \notin \text{span}(S) \Rightarrow S \cup \{u\}$ lin. unabh.
 ii) $v_i \in S$, $v_i \in \text{span}(S \setminus \{v_i\}) \Rightarrow \text{span}(S) = \text{span}(S \setminus \{v_i\})$
 Bew.: i) Sei $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r + ku = 0$. Da $u \notin \text{span}(S)$ ist, muss $k = 0$ sein, denn sonst wäre die Gleichung nach u auflösbar; daher wird $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = 0$ werden. Wegen der lin. Unabh. von S ist dann auch $k_1 = \dots = k_r = 0$.
 ii) $\text{span}(S \setminus \{v_i\}) \subseteq \text{span}(S)$, wegen
 $\dots + k_{i-1} v_{i-1} + \dots + k_{i+1} v_{i+1} + \dots = \dots + k_{i-1} v_{i-1} + 0 v_i + k_{i+1} v_{i+1} + \dots$
 Zum Nachweis von " $\supseteq$ " sei $u \in \text{span}(S)$, d. h. $u = k_1 v_1 + \dots + k_r v_r$.
 Nun wird zunächst $v_i = v_1$ angenommen. Nach Vor. ist $v_1 = l_2 v_2 + \dots + l_r v_r$ und damit $u = k_1(l_2 v_2 + \dots + l_r v_r) + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r \in \text{span}(S \setminus \{v_1\})$.
 Die Gültigkeit einer analogen Argumentation für $i = 2, \dots, r$ ist offensichtlich.

Die Basiseigenschaft einer $\dim(V) = n$ -elementigen Teilmenge $S \subseteq V$ folgt schon entweder aus der linearen Unabhängigkeit von S oder aus $\text{span}(S) = V$ aufgrund von

Satz V.13 Für $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ mit $\dim(V) = n \geq 2$ gilt:

i) S ist Basis von $V \Leftrightarrow$ ii) S ist lin. unabh. $\Leftrightarrow$ iii) $\text{span}(S) = V$

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii): trivial

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei S lin. unabh.

Wäre $\text{span}(S) \neq V$, gäbe es ein $u \in V$ mit $u \notin \text{span}(S) \subset V$, und nach Satz V.12.i) würde dann $S \cup \{u\}$ linear unabhängig sein mit $\#(S \cup \{u\}) = n + 1$. Das kann aber nicht sein, denn nach Theorem V.10.i) sind in V höchstens $\dim(V) = n$ Vektoren linear unabhängig.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei $\text{span} S = V$.

Wäre S lin. abh., gäbe es ein $v_i \in S$ mit $v_i \in \text{span}(S \setminus \{v_i\})$ nach Satz V.6, und nach Satz V.12.ii) würde dann $\text{span}(S \setminus \{v_i\}) = \text{span}(S) = V$ sein mit $\#(S \setminus \{v_i\}) = n - 1$. Das kann aber nicht sein, denn nach Theorem V.10.ii) enthält ein EZS von V mindestens $\dim(V) = n$ Vektoren.

Der Satz gilt auch für $n = 1$ wegen " $\{v\}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow v \neq 0$ " (Übung)

NB Für $V = K^n$ ist ii) und iii) jeweils gleichbedeutend mit $\det(v_1 \ \dots \ v_n) \neq 0$.

Siehe dazu Satz I.15, Lemma II.7.

Satz V.14 Für $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ mit $\dim(V) = n$ gilt:

i) $\text{span}(S) = V$ und $r > n \Rightarrow \bigvee_{S' \subset S} S'$ ist Basis von V ,

ii) S lin. unabh. und $r < n \Rightarrow \bigvee_{S \subset S'} S'$ ist Basis von V ,

d. h. i) Jedes EZS von V , das keine Basis von V ist, kann durch geeignete Auswahl zu einer Basis von V "verkleinert" werden.

ii) Jede lin. unabh. Teilmenge von V , die keine Basis von V ist, kann durch geeignete Ergänzung zu einer Basis von V "vergrößert" werden.

- Bew.: Wegen $\dim(V) = n$ sind i) aus S $r - n$ Vektoren auszusondern bzw. ii) in S $n - r$ Vektoren einzufügen.
- i) Nach Theorem V.10.i) ist S lin. abh., und daher lässt sich nach Satz V.6, Satz V.12.ii) aus S ein v_i entfernen, sodass $V = \text{span}(S) = \text{span}(S \setminus \{v_i\})$ ist. Das Verfahren wird nun $(r - n)$ -mal angewendet und nach Satz V.13 bilden die verbleibenden n Vektoren eine Basis.
- ii) Ebenso garantieren Theorem V.10.ii), Satz V.12.i) und Satz V.13 ein theoretisches schrittweises Ergänzungsverfahren.

Satz V.15 Ist W ein UVR von V mit $\dim(V) \geq 1$, so gilt:

- i) $\dim(W) \leq \dim(V)$ ii) $\dim(W) = \dim(V) \Rightarrow W = V$

- Bew.: i) Da W auch endlichdim. ist (Übung?), enthält W eine linear unabhängige Teilmenge S mit $\dim(W) = \#(S)$ Vektoren, für die nach Theorem V.10.i) $\#(S) \leq \dim(V)$ ist.
- ii) Eine Basis S von W , also $W = \text{span}(S)$, S lin. unabh. und $\dim(W) = \#(S)$, ist auch Basis von V aufgrund der Vor. $\#(S) = \dim(V)$ und Satz V.13. Also $W = \text{span}(S) = V$.

NB Der Satz gilt trivialerweise auch für $\dim(V) = 0$.

5. Zeilen-, Spalten-, Nullraum

Zur ausführlichen Untersuchung von Matrizen und linearen Gleichungssystemen (LGS) werden die folgenden, jeder Matrix anhaftenden endlichdim. Vektorräume betrachtet.

Def. Für $A \in K^{m \times n}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = (c_1 \dots c_n)$

heißt $\text{span}\{r_1, \dots, r_m\} =: \text{Zeilenraum}(A) \subseteq K^n$

$\text{span}\{c_1, \dots, c_n\} =: \text{Spaltenraum}(A) \subseteq K^m$

$\text{Lös}(A | 0) = \{u \mid Au = 0\} =: \text{Nullraum}(A) \subseteq K^n$.

NB Wegen $\text{Zeilenr}(A) = \text{Spaltenr}(A^T)$, $\text{Zeilenr}(A^T) = \text{Spaltenr}(A)$ erhält man die vier fundamentalen Untervektorräume bzgl. einer Matrix $A \in K^{m \times n}$:

$\text{Zeilenr}(A), \text{Nullr}(A) \subseteq K^n$; $\text{Spaltenr}(A), \text{Nullr}(A^T) \subseteq K^m$

Die Struktur der allgemeinen Lösung eines inhomogenen LGS klärt

Satz V.16 Sei $u_0 \in \text{Lös}(A|b)$ und $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis des $\text{Nullr}(A)$. Dann gilt:

$$u \in \text{Lös}(A|b) \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{i)} \\ \bigvee_{k_1, \dots, k_r \in K} \end{matrix} u = u_0 + \sum_{i=1}^r k_i v_i \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{ii)} \\ \bigvee_{v \in \text{span } S} \end{matrix} u = u_0 + v;$$

kurz $\text{Lös}(A|b) = u_0 + \text{Lös}(A|0)$,

d. h., die allgemeine Lösung von $Ax = b$ ist die Summe aus einer partikulären Lösung u_0 von $Ax = b$ und der allgemeinen Lösung von $Ax = 0$.

Bew.: i) " $\Rightarrow$ " Wegen $A(u - u_0) = Au - Au_0 = b - b = 0$ ist $u - u_0 \in \text{Lös}(A|0) = \text{span}(S)$; und damit ist $u - u_0 = k_1 v_1 + \dots + k_r v_r$ für $k_i \in K$, $v_i \in S$.

$$" \Leftarrow " \quad A \left(u_0 + \sum_{i=1}^r k_i v_i \right) = Au_0 + \sum_{i=1}^r k_i A(v_i) = b + \sum_{i=1}^r k_i 0 = b$$

ii) Klar nach Definition von $\text{span}(S)$.

Zur Invarianz gegenüber elementaren Zeilenumformungen geben die nächsten zwei Sätze Auskunft.

Satz V.17

Durch elem. Z-Umf. in $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ ändert sich der i) Nullr(A) und ii) Zeilenr(A) nicht.

Bew.: i) Mit Satz I.1, d. h.

$$\text{Lös}(A|0) = \text{Lös}(A'|0).$$

ii) Anwendung von Satz V.5 auf

$$\begin{aligned} \text{Typ I}_Z \quad \{r_1, \dots, r_i, \dots, r_m\} &\subseteq \text{span}\{r_1, \dots, kr_i, \dots, r_m\} \\ \{r_1, \dots, kr_i, \dots, r_m\} &\subseteq \text{span}\{r_1, \dots, r_i, \dots, r_m\} \\ &\text{mit } k \neq 0 \end{aligned}$$

Typ II_Z, III_Z : analog

Aber i. Allg. ändern elem. Z-Umf. den Spaltenr(A),

$$\text{z. B. } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \quad \text{Spaltenr}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \neq \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \text{Spaltenr}(A').$$

Jedoch bleibt die lin. Ab- bzw. Unabhängigkeit korrespondierender Spalten nach elem. Z-Umf. erhalten.

Satz V.18 Seien $A, A' \in K^{m \times n}$ mit $(c_1 \dots c_n) = A \xrightarrow{\text{elem. Z-Umf.}} A' = (c'_1 \dots c'_n)$.

Für eine Teilmenge $S_r = \{w_1, \dots, w_r\} \subseteq \{c_1, \dots, c_n\} = S$ und ihrer korrespondierenden $S'_r = \{w'_1, \dots, w'_r\} \subseteq \{c'_1, \dots, c'_n\} = S'$ gilt

- i) S_r ist lin. unabh. $\Leftrightarrow S'_r$ ist lin. unabh.
- ii) S_r ist Basis vom Spaltenr(A) $\Leftrightarrow S'_r$ ist Basis vom Spaltenr(A').

Bew.: Aus S_r, S'_r werden die Matrizen $A_r = (w_1 \dots w_r)$, $A'_r = (w'_1 \dots w'_r) \in K^{m \times r}$ gebildet.

$$\text{i) } \{0\} = \text{Lös}(A_r|0) \Leftrightarrow \text{Lös}(A'_r|0) = \{0\} \text{ nach Satz I.1.}$$

$$\text{ii) } "\Rightarrow": \text{ noch zu zeigen: } \text{span}(S_r) = \text{span}(S) \Rightarrow \text{span}(S'_r) = \text{span}(S') :$$

$$\alpha) \text{span}(S'_r) \subseteq \text{span}(S'), \text{ wegen } S'_r \subseteq S' ;$$

$$\beta) "\supseteq": \text{Zunächst gilt offensichtlich allgemein für } A = (c_1 \dots c_n), S = \{c_1, \dots, c_n\}$$

$$\begin{aligned} b \in \text{span}(S) &\Leftrightarrow Ax = b \text{ ist lösbar,} \\ \text{wenn man } b &= x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = Ax \text{ betrachtet.} \end{aligned}$$

Sei also $b' \in \text{span}(S')$, dann ist $A'x = b'$ lösbar, also auch $Ax = b$ nach Satz I.1. Dann ist $b \in \text{span}(S) = \text{span}(S_r)$ nach Vor. und daher $A_r x = b$ lösbar, und nach Satz I.1 ebenfalls $A'_r x = b'$. Also ist schließlich $b' \in \text{span}(S'_r)$. $\square$

" $\Leftarrow$ ": analog

NB Insbesondere bleibt nach elem. Z-Umf. die Dimension des Spaltenraumes unverändert.

Satz V.19 Sei $R \in K^{m \times n}$ eine Matrix in Zeilenstufenform mit führenden Einsen.

Dann bildet die Menge

- i) der von Null verschiedenen Zeilenvektoren, d. h. diejenigen mit einer führenden Eins, eine Basis des Zeilenr(R),
- ii) der Spaltenvektoren mit einer führenden Eins eine Basis des Spaltenr(R).

Bew.: ...

z. B. i) Bestimmung einer Basis
und der Dimension des α) Zeilen-, β) Spalten- und γ) Nullraumes von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6) \quad \text{und des } \delta) \text{ Nullraumes von } A^T.$$

$$\text{Lösung: } R = A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{pmatrix} = (c'_1 \ c'_2 \ c'_3 \ c'_4 \ c'_5 \ c'_6)$$

$$r'_1 = (1 \ -3 \ 4 \ -2 \ 5 \ 4)$$

α) Die Vektoren $r'_2 = (0 \ 0 \ 1 \ 3 \ -2 \ -6)$ bilden eine Basis von $\text{Zeilenr}(A)$.

$$r'_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5) \quad 3 = \dim \text{Zeilenr}(A') = \dim \text{Zeilenr}(A)$$

Satz V.17

β) Die Vektoren $c'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c'_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c'_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\text{Spaltenr}(A')$.
 $3 = \dim \text{Spaltenr}(A') = \dim \text{Spaltenraum}(A)$
Satz V.18

Die entsprechenden Spalten von A

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{bilden nach Satz V.18 eine Basis von } \text{Spaltenr}(A).$$

γ) Aus A' folgt $x_6 = r$, $x_5 = -5r$, $x_4 = s$, $x_3 = -3s - 4r$, $x_2 = t$, $x_1 = 3t + 14s + 37r$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + 14s + 37r \\ t \\ -3s - 4r \\ s \\ -5r \\ r \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 37 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = t v_1 + s v_2 + r v_3$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ist Basis von $\text{Nullr}(A') = \text{Nullr}(A)$.

$$3 = \dim \text{Nullr}(A') = \dim \text{Nullr}(A)$$

δ) Übung

ii) α) Bestimmung einer Teilmenge $S \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ mit

$v_1 = (1, -2, 0, 3)$, $v_2 = (2, -5, -3, 6)$, $v_3 = (0, 1, 3, 0)$, $v_4 = (2, -1, 4, -7)$, $v_5 = (5, -8, 1, 2)$,
sodass S eine Basis von $\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ist.

β) Darstellung der verbleibenden Vektoren aus S als Linearkombination der Basisvektoren.

Lösung α): Wir betrachten die Matrix A mit den Spaltenvektoren $v_1, v_2, \dots, v_5$, d. h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \text{ und bestimmen eine Basis ihres Spaltenraumes. Als red. ZStF ergibt sich}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit den Spaltenvektoren } w_1, w_2, \dots, w_5.$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{matrix}$$

$\{w_1, w_2, w_4\}$ ist eine Basis des Spaltenraumes von A' , und die entsprechenden Vektoren $\{v_1, v_2, v_4\}$ bilden dann die gesuchte Basis der linearen Hülle von $v_1, v_2, \dots, v_5$.

β): Wir schreiben zunächst w_3 und w_5 als Linearkombination von w_1, w_2 und w_4 , d. h.

$$w_3 = 2w_1 - w_2$$

$$w_5 = w_1 + w_2 + w_4, \text{ woraus sich sofort die gewünschte Darstellung}$$

$$v_3 = 2v_1 - v_2$$

$$v_5 = v_1 + v_2 + v_4 \text{ ergibt, da } \text{Nullr}(A) = \text{Nullr}(A') \text{ ist.}$$

6. Rang und Defekt

Die Zeilenstufenform R einer Matrix A liefert

$$\dim(\text{Zeilenr}(A)) = \dim(\text{Zeilenr}(R)) = \dim(\text{Spaltenr}(R)) = \dim(\text{Spaltenr}(A))$$

Satz V.17.ii) Satz V.19 Satz V.18.NB)

und damit den

Satz V.20 Für $A \in K^{m \times n}$ ist $\dim(\text{Zeilenr}(A)) = \dim(\text{Spaltenr}(A))$

Def. Der Rang und Defekt einer Matrix A ist definiert durch

i) $\text{rang}(A) := \dim(\text{Spaltenr}(A)) \quad [= \dim(\text{Zeilenr}(A))]$

ii) $\text{def}(A) := \dim(\text{Nullr}(A))$

- NB**
- i) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$ wegen $\text{Spaltenr}(A) = \text{Zeilenr}(A^T)$.
 - ii) Für die Zeilenstufenf. R einer Matrix A ist $\text{rang}(R) = \text{rang}(A)$ und $\text{def}(R) = \text{def}(A)$.
 - iii) $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$ = die kleinere der beiden Zahlen m, n .
 - iv) Da $\text{Nullr}(A) = \{c_1 v_1 + \dots + c_d v_d \mid c_i \in K\}$ für eine Basis $\{v_1, \dots, v_d\}$, ist $\text{def}(A) = d$ = Anzahl der freien Parameter c_i in $\text{Lös}(A|0)$.
 - v) Für ein lösbares LGS $Ax = b$ ist $\text{def}(A) = \text{Anzahl der freien Parameter in } \text{Lös}(A|b)$ aufgrund der Darstellung $u = u_0 + c_1 v_1 + \dots + c_d v_d$ für $u \in \text{Lös}(A|b)$ gemäß Satz V.16.

Damit erhält man den

Satz V.21 (Dimensionsformel) Für $A \in K^{m \times n}$ ist $\text{rang}(A) + \text{def}(A) = n$

Bew.: In der Zeilenstufenform $(R|0)$ des homog. LGS's $Ax = 0$ zerfallen die n Variablen $x_1, \dots, x_n$ in r führende Var. $d = n - r$ freie Var.

+ $= n$ Var.

bzw. r führende Einsen bzw. $d = n - r$ freie Parameter

NB Für $A \in K^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = r$ ist $\text{def}(A) = n - r$ und $\text{def}(A^T) = m - r$.

Satz V.22 (Konsistenzsatz) Für $A \in K^{m \times n}$ sind äquivalent

- i) $Ax = b$ ist lösbar. ii) $b \in \text{Spaltenr}(A)$ iii) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$,
wobei $A|b$ die erweiterte Matrix bezeichnet.

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ ii) siehe Bew. ii) $\Rightarrow$ zu Satz V.18.

- ii) $\Rightarrow$ iii) Nach Satz V.12.ii) folgt aus $b \in \text{Spaltenr}(A)$,
dass $\text{Spaltenr}(A|b) = \text{Spaltenr}(A)$ ist, und daraus die Behauptung.
iii) $\Rightarrow$ ii) $\text{rang}(A|b) = \text{rang}(A) \Rightarrow b \in \text{Spaltenr}(A|b) = \text{Spaltenr}(A)$.
Satz V.15.ii)

NB Betrachtet man die Zeilenstufenf. R von A und $R'|b'$ der erweiterten Matrix $A|b$, so besagt Satz V.22:

$$Ax = b \text{ ist unlösbar} \Leftrightarrow R \text{ hat mehr Nullzeilen als } R'|b'.$$

Satz V.23 Für $A \in K^{m \times n}$ sind äquivalent

- i) $\bigwedge_{b \in K^m} Ax = b$ ist lösbar ii) $\text{Spaltenr}(A) = K^m$ iii) $\text{rang}(A) = m$

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ ii) Mit Satz V.22 ii) $\Rightarrow$ iii) offensichtlich

$$\text{iii) } = \text{ ii) } \quad \dim(\text{Spaltenr}(A)) = m = \dim(K^m) \xRightarrow{\text{Satz V.15.ii)}} \text{Spaltenr}(A) = K^m$$

Def. Ein LGS $Ax = b$, $A \in K^{m \times n}$ mit $m > n$ heißt überbestimmt, und mit $m < n$ unterbestimmt.

NB i) Ein überbestimmtes LGS $Ax = b$ ist nicht für alle b lösbar, denn sonst wäre nach Satz V.23 $m > n \geq \text{rang}(A) = m$. Es lässt sich aber immer ein Kriterium für die Lösbarkeit angeben, das analog zum folgenden Beispiel ausgedrückt werden kann.

$$\text{z. B. } Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & b_1 \\ 1 & -2 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \\ 1 & -4 & b_4 \\ 1 & 5 & b_5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & b_3 - b_1 \\ 0 & -1 & b_4 - b_1 \\ 0 & 8 & b_5 - b_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 4b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_4 + b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_5 - 8b_2 + 7b_1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \text{ lösbar} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ -3r + 4s \\ 2r - s \\ -7r + 8s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ für } r, s \in K.$$

ii) Ein lösbares unterbestimmtes LGS hat mindestens einen freien Parameter, da $\text{def}(A) = n - \text{rang}(A) \geq n - m \geq 1$. Vgl. dazu Satz I.3.

Satz V.24 Für $A \in K^{m \times n}$ sind äquivalent

- i) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung, d. h. $\text{Lös}(A|0) = \{0\}$.
ii) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
iii) $Ax = b$ hat für jedes $b \in K^m$ höchstens eine Lösung, d. h. $\bigwedge_{b \in K^m} \#(\text{Lös}(A|b)) \leq 1$.

Betrachtet man die lin. Transf. $T_A : K^n \rightarrow K^m$, $T_A(x) = Ax$, so besagt i) $\Leftrightarrow$ iii):

$$\text{Kern } T_A := \text{Nullr}(A) = \{0\} \Leftrightarrow T_A \text{ ist injektiv.}$$

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ ii) s. Definition der lin. Unabhängigkeit

$$\text{i) } \Rightarrow \text{ iii) : } x_1, x_2 \in \text{Lös}(A|b) \Rightarrow 0 = b - b = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) \xRightarrow{\text{Vor.}} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{iii) } \Rightarrow \text{ i) : } \bigwedge_{b \in K^m} \#(\text{Lös}(A|b)) \leq 1 \Rightarrow \#(\text{Lös}(A|0)) \leq 1 \Rightarrow \text{Lös}(A|0) = \{0\}$$

Zur Wiederholung und Zusammenfassung von Kapitel I bis V :

Theorem LA1

Für $A \in K^{n \times n}$ und $T_A : K^n \rightarrow K^n$ mit $T_A(x) = Ax$ sind folgende Aussagen äquivalent:

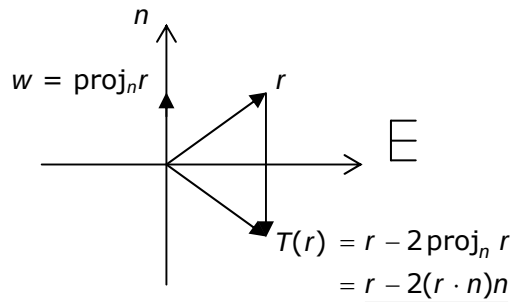
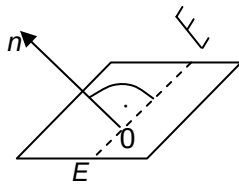
- 1) A ist invertierbar.
- 2) $Ax = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung.
- 3) A hat die reduzierte Zeilenstufenform $\mathbf{1}_n$.
- 4) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.
- 5) $Ax = b$ ist für jede $n \times 1$ -Matrix b lösbar.
- 6) $Ax = b$ ist für jede $n \times 1$ -Matrix b eindeutig lösbar.
- 7) $\det(A) \neq 0$.
- 8) T_A ist bijektiv.
- 9) T_A ist surjektiv.
- 10) T_A ist injektiv.
- 11) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- 12) Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- 13) Die Spaltenvektoren von A erzeugen den Raum K^n .
- 14) Die Zeilenvektoren von A erzeugen den Raum K^n .
- 15) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis des K^n .
- 16) Die Zeilenvektoren von A bilden eine Basis des K^n .
- 17) $\text{rang}(A) = n$.
- 18) $\text{def}(A) = 0$.

$$A|b \xleftrightarrow[\text{Spaltenvertauschungen}]{\text{elem. Zeilenumformungen}} A'|b'$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} a'_{11} & & 0 & * & b'_1 \\ & a'_{22} & & & b'_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a'_{kk} & \\ \hline & & 0 & 0 & \vdots \\ & & & & b'_m \end{array} \right)$$

Appendix I – Spiegelung in $\mathbb{R}^3$

Spiegelung an einer Ebene $E : n \cdot r = 0$, $\|n\| = \sqrt{n \cdot n} = 1$



i) Linearität von T:

$$T(r+s) = r+s - 2((r+s) \cdot n)n = r+s - 2(r \cdot n + s \cdot n)n = r+s - 2((r \cdot n)n + (s \cdot n)n) \\ = r+s - 2(r \cdot n)n - 2(s \cdot n)n = r - 2(r \cdot n)n + s - 2(s \cdot n)n = T(r) + T(s),$$

$$T(kr) = kr - 2(kr \cdot n)n = kr - 2k(r \cdot n)n = k(r - 2(r \cdot n)n) = kT(r)$$

ii) $T(e_i) = e_i - 2(e_i \cdot n)n = \underline{e_i - 2n_i n}$ für $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also: $[T] = (T(e_1)T(e_2)T(e_3)) = \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_2n_1 & -2n_3n_1 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_3n_2 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix} = [T]^T$, d. h. $[T]$ ist symmetrisch
 $[T] = \mathbf{1} - 2nn^T$

iii) $T(e_i) \cdot T(e_j) = (e_i - 2n_i n)(e_j - 2n_j n) = e_i \cdot e_j - 2n_i n \cdot e_j - 2n_j n \cdot e_i + 4n_i n_j n^2 \\ = e_i e_j - 4n_i n_j + 4n_i n_j = e_i e_j$

Also: $T(e_i) \cdot T(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$, d. h. $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ ist Orthonormal system.

iv) $\det[T] = \det(T(e_1)T(e_2)T(e_3)) = (T(e_1) \times T(e_2)) \cdot T(e_3) \\ = [(e_1 - 2n_1 n) \times (e_2 - 2n_2 n)] \cdot (e_3 - 2n_3 n) = [e_1 \times e_2 - 2n_2 e_1 \times n - 2n_1 n \times e_2] \cdot (e_3 - 2n_3 n) \\ = e_3 \cdot e_3 - 2n_2 \begin{vmatrix} 1 & n_1 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & n_3 & 1 \end{vmatrix} - 2n_1 \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ n_2 & 1 & 0 \\ n_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2n_3 n \cdot e_3 \\ = 1 - 2n_2^2 - 2n_1^2 - 2n_3^2 = 1 - 2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

Also: $\det[T] = -1$

v) $(T \circ T)(r) = T(T(r)) = T(r) - 2[T(r) \cdot n]n = r - 2(r \cdot n)n - 2[(r - 2(r \cdot n)n) \cdot n]n \\ = r - 2(r \cdot n)n - 2[r \cdot n - 2(r \cdot n)]n = r - 2(r \cdot n)n - 2(-r \cdot n)n = r$

Also: $[T \circ T] = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, d. h. $[T]^{-1} = [T]$ und mit ii) ist $[T]^{-1} = [T]^T$.

Eine Matrix mit der Eigenschaft $A^{-1} = A^T$ heißt orthogonal. Zu den wichtigen orthogonalen Matrizen später im VI. Kapitel.

vi) Für $n = (n_1, n_2, 0)$ erhält man aus ii) $[T] = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & 0 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

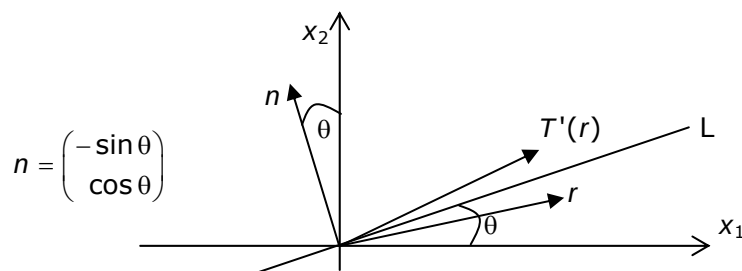
d. h., für die Spiegelung an einer zu der x_1, x_2 -Ebene senkrecht verlaufenden Ebene,
d. h., an einer in der x_1, x_2 -Ebene gelegenen Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^2$,
ergibt sich

$$[T'] = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 \end{pmatrix}, \quad T' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad \text{Mit } n_1 := -\sin \theta, \quad n_2 := \cos \theta \quad \text{ist wegen}$$

$$1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta, \quad 2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta,$$

$$1 - 2\cos^2 \theta = -\cos 2\theta \quad (\text{Additionstheoreme für } \sin, \cos)$$

$$[T'] = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad \text{die Darstellungsmatrix der Spiegelung im } \mathbb{R}^2 \text{ an einer Geraden } L, \quad 0 \in L \subseteq \mathbb{R}^2.$$



Appendix II – Determinantengleichungen für Kurven und Flächen

Determinantengleichungen für Kurven und Flächen in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ durch gegebene Punkte.

Anwendung von: $Ax = 0$ hat eine nichttriviale Lösung $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

1. Die Punkte $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ mit $P_1 \neq P_2$ liegen auf der Geraden $g : ax + by + c = 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{matrix}, \quad (a, b, c) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Analog erhält man für drei Punkte P_1, P_2, P_3 , die nicht auf einer Geraden liegen, die durch sie festgelegte Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$ mittels

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

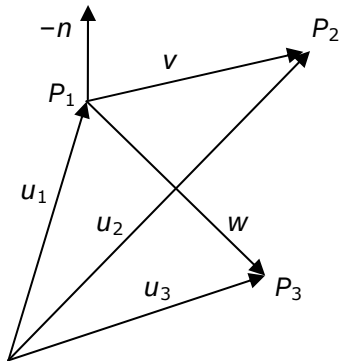
z. B. $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(0, 1, 2)$

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x - 2y + z = y - 1 + x - 2y + z$$

$$\Rightarrow \underline{x - y + z - 1 = 0}$$

Zur Erinnerung:

In Kapitel IV wurde mit dem Skalar- und Kreuzprodukt gerechnet, d. h.



$$E: n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d$$

$$\underline{\underline{n = v \times w, \quad d = n \cdot u_i, \quad i = 1, 2, 3}}$$

$$v = u_2 - u_1 = (0, 1, 1) \quad w = u_3 - u_1 = (-1, 1, 2) \quad n = v \times w = (1, -1, 1), \quad d = n \cdot u_i = 1$$

3. Kugeloberfläche $S_{v_0}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ um $v_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$ mit Radius R , d. h. $S_{v_0}^2 = \{u \mid d(u, v_0) = R\}$.

Mit $\underline{R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$ erhält man für vier nicht in einer Ebene liegende Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{z. B. } P_1(1,0,0), P_2(1,1,1), P_3(0,1,2), P_4(0,0,0), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$0 = \begin{vmatrix} r^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 & x & y & z \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r^2 & y & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(x - 2y + z) + r^2 - y - 2z$$

$$= x^2 - x + y^2 + y + z^2 - 3z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}}}$$

Analog werden Kegelschnitte behandelt, d. h. Kurven in $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

1. Extrablatt zur Linearen Algebra 1

Die Σ -Notation

Die mathematischen Formeln ...

Sie spielen nur mit sich selbst, drücken nichts als ihre wunderbare Natur aus, und eben darum sind sie so ausdrucksvoll – eben darum spiegelt sich in ihnen das seltsame Verhältnisspiel der Dinge.

Novalis, "Monolog", 1798

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n =: \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$$

i)
$$\sum_{k=1}^n (aa_k + bb_k) = a \sum_{k=1}^n a_k + b \sum_{k=1}^n b_k$$

aufgrund der

Assoziativität,
Kommutativität,
Distributivität.

$$= \begin{aligned} & (aa_1 + bb_1) \\ & + (aa_2 + bb_2) \\ & \vdots \\ & + (aa_n + bb_n) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} aa_1 \\ + \\ aa_2 \\ + \\ \vdots \\ + \\ aa_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bb_1 \\ + \\ bb_2 \\ + \\ \vdots \\ + \\ bb_n \end{pmatrix} = \begin{aligned} & a(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ & + b(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \end{aligned}$$

ii) Doppelsummen: Ein Term mit zwei Indizes – Änderung der Summationsreihenfolge

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) =: \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} =: \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$$

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ & + \\ & + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ & + \\ & \vdots \\ & + \\ & + a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn} = \sum_{j=1}^n a_{mj} \\ & \quad \quad \quad || \\ & = \sum_{i=1}^m a_{i1} + \sum_{i=1}^m a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^m a_{in} \quad \left| \quad \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \right. \\ & = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) \end{aligned}$$

iii) Doppelsummen: Zwei Terme mit einem Index

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j}} = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)$$

	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$\dots$	$a_1 b_n$
a_2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$\dots$	$a_2 b_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	$a_m b_1$	$a_m b_2$	$\dots$	$a_m b_n$

iv) Doppelsummen: Drei Terme mit zwei Indizes

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 a_k \left(\sum_{l=1}^3 b_{kl} c_l \right) &= \begin{aligned} &a_1 (b_{11} c_1 + b_{12} c_2 + b_{13} c_3) \\ &+ a_2 (b_{21} c_1 + b_{22} c_2 + b_{23} c_3) \end{aligned} = \begin{aligned} &a_1 b_{11} c_1 + a_1 b_{12} c_2 + a_1 b_{13} c_3 \\ &+ a_2 b_{21} c_1 + a_2 b_{22} c_2 + a_2 b_{23} c_3 \end{aligned} \\ &= \begin{aligned} &a_1 b_{11} c_1 + a_2 b_{21} c_1 \\ &+ a_1 b_{12} c_2 + a_2 b_{22} c_2 \\ &+ a_1 b_{13} c_3 + a_2 b_{23} c_3 \end{aligned} = \begin{aligned} &(a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) c_1 \\ &+ (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) c_2 \\ &+ (a_1 b_{13} + a_2 b_{23}) c_3 \end{aligned} = \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{k=1}^2 a_k b_{kl} \right) c_l \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^m k_j \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (c_{ij} k_j) v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (c_{ij} k_j) v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} k_j \right) v_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m k_j \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} v_i \right) &= \begin{aligned} &k_1 (c_{11} v_1 + \dots + c_{i1} v_i + \dots + c_{n1} v_n) \\ &\vdots \\ &+ k_j (c_{1j} v_1 + \dots + c_{ij} v_i + \dots + c_{nj} v_n) \\ &\vdots \\ &+ k_m (c_{1m} v_1 + \dots + c_{im} v_i + \dots + c_{nm} v_n) \end{aligned} = \begin{aligned} &(c_{11} k_1) v_1 + \dots + (c_{i1} k_1) v_i + \dots + (c_{n1} k_1) v_n \\ &\vdots \\ &+ (c_{1j} k_j) v_1 + \dots + (c_{ij} k_j) v_i + \dots + (c_{nj} k_j) v_n \\ &\vdots \\ &+ (c_{1m} k_m) v_1 + \dots + (c_{im} k_m) v_i + \dots + (c_{nm} k_m) v_n \end{aligned} \\ &= \begin{aligned} &(c_{11} k_1 + \dots + c_{1j} k_j + \dots + c_{1m} k_m) v_1 \\ &\vdots \\ &+ (c_{i1} k_1 + \dots + c_{ij} k_j + \dots + c_{im} k_m) v_i \\ &\vdots \\ &+ (c_{n1} k_1 + \dots + c_{nj} k_j + \dots + c_{nm} k_m) v_n \end{aligned} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} k_j \right) v_i \end{aligned}$$

Literaturhinweise:

Anton, Howard u. Rorres, Chris: **Elementary Linear Algebra / Application Version** – 8th ed.; John Wiley & Sons, Inc., 2000

Anton, Howard u. Rorres, Chris: **Elementary Linear Algebra / Application Version / Student Solutions Manual** – 8th ed.; John Wiley & Sons, Inc., 2000

Anton, Howard: **Lineare Algebra / Einführung, Grundlagen, Übungen**; Spektrum Akad. Verlag GmbH, 1998

Beutelspacher, Albrecht: **Lineare Algebra** – 6. Aufl.; Vieweg Verlag, 2003

Fischer, Gerd: **Lineare Algebra / Eine Einführung für Studienanfänger** – 13. Aufl.; Vieweg Verlag, 2002

Jänich, Klaus: **Lineare Algebra** – 10. Aufl.; Springer-Verlag, 2004

Bröcker, Theodor: **Lineare Algebra und Analytische Geometrie**; Birkhäuser Verlag, 2003

The Reduced Row Echelon Form of a Matrix Is Unique: A Simple Proof

Mathematics Magazine
Vol. 57, No. 2, Pg. 93-94
March 1984

THOMAS YUSTER
Middlebury College
Middlebury, VT 05753

One of the most simple and successful techniques for solving systems of linear equations is to reduce the coefficient matrix of the system to **reduced row echelon form**. This is accomplished by applying a sequence of elementary row operations (see, e.g., [1, p. 5]) to the coefficient matrix until a matrix B is obtained which satisfies the following description:

If a row of B does not consist entirely of zeros then the first nonzero number in the row is a 1 (usually called a leading 1).

If there are any rows that consist entirely of zeros, they are grouped together at the bottom of B .

In any two successive non-zero rows of B , the leading 1 in the lower row occurs farther to the right than the leading 1 in the higher row.

Each column of B that contains a leading 1 has zeros everywhere else.

The matrix B is said to be in reduced row echelon form.

It is well known that if A is an $m \times n$ matrix and x is an $n \times 1$ vector, then the systems $Ax = 0$ and $Bx = 0$ have the same solution set. However, the solution to the system $Bx = 0$ may be read off immediately from the matrix B . For example, consider the system:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \\3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0\end{aligned}$$

The matrix of coefficients is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

and through use of elementary row operations we obtain

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which is seen to be in reduced row echelon form. Column 3 (unlike columns 1 and 2) does not contain a leading 1. We call such a column a **free** column, because in the solution to the system $Bx = 0$ (and hence $Ax = 0$), the variable corresponding to that column is a free parameter. Thus we can set $x_3 = t$, and read off the equations $x_1 + 2t = 0$ (row 1) and $x_2 + t = 0$ (row 2). The solution set is then $x_1 = -2t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$.

An important theoretical result is that the reduced row echelon form of a matrix is unique. Most texts either omit this result entirely or give a proof which is long and very technical (see [2, p. 56]). The following proof is somewhat clearer and less complicated than the standard proofs.

THEOREM. *The reduced row echelon form of a matrix is unique.*

Proof. Let A be an $m \times n$ matrix. We will proceed by induction on n . For $n = 1$ the proof is obvious. Now suppose that $n > 1$. Let A' be the matrix obtained from A by deleting the n th column. We observe that any sequence of elementary row operations which places A in reduced

row echelon form also places A' in reduced row echelon form. Thus by induction, if B and C are reduced row echelon forms of A , they can differ in the n th column only. Assume $B \neq C$. Then there is an integer j such that the j th row of B is not equal to the j th row of C . Let u be any column vector such that $Bu = 0$. Then $Cu = 0$ and hence $(B - C)u = 0$. We observe that the first $n - 1$ columns of $B - C$ are zero columns. Thus the j th coordinate of $(B - C)u$ is $(b_{jn} - c_{jn})u_n$. Since $b_{jn} \neq c_{jn}$ we must have $u_n = 0$. Thus any solution to $Bx = 0$ or $Cx = 0$ must have $x_n = 0$. It follows that both the n th columns of B and C must contain leading 1's, for otherwise those columns would be free columns and we could arbitrarily choose the value of x_n . But since the first $n - 1$ columns of B and C are identical, the row in which this leading 1 must appear must be the same for both B and C , namely the row which is the first zero row of the reduced row echelon form of A' . Because the remaining entries in the n th columns of B and C must all be zero, we have $B = C$, which is a contradiction. This establishes the theorem.

We remark that this proof easily generalizes to the following proposition: *Let A be an $m \times n$ matrix with row space W . Then there is a unique $m \times n$ matrix B in reduced row echelon form such that the row space of B is W .* (For another proof, see [2, p. 56].)

References

- [1] H. Anton, Elementary Linear Algebra, Wiley, New York, 1977.
- [2] K. Hoffman and R. Kunze, Linear Algebra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.

Übungen zur Linearen Algebra
Studiengang Mathematik
10.10.2006

2. Extrablatt zur Linearen Algebra 1

TFH Berlin
Fachbereich II
Otto Hamburg

3. Extrablatt zur Linearen Algebra 1

4. Rechenregeln für Matrizen

Satz I.5 Sind die angegebenen Operationen für Matrizen $A, B, C, \mathbf{1}$ und Skalare $a, b, 1 \in K$ ausführbar, so gilt:

- | | | | | |
|-------|--|-------|---------------------------------|--------------------|
| i) | $(A + B) + C = A + (B + C)$ | i)* | $(AB)C = A(BC)$ | Assoziativität |
| ii) | $A + 0 = 0 + A = A$ | ii)* | $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$ | neutrales Element |
| iii) | $A + (-A) = -A + A = 0$ | iii)* | ? ... | inverses Element |
| iv) | $A + B = B + A$ | iv)* | ? ... | Kommutativität |
| v) | $A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$ | | | Distributivgesetze |
| vi) | $a(bA) = (ab)A, a(AB) = (aA)B = A(aB)$ | | | |
| vii) | $(a + b)A = aA + bA$ | | | |
| viii) | $a(A + B) = aA + aB$ | | | |
| ix) | $1A = A$ | | | |

Def. Existiert für $A \in K^{n \times n}$ ein $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = BA = \mathbf{1}$, so heißt A invertierbar (regulär) und B die Inverse von A ,

z. B. $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 3}$ ist nicht invertierbar, da $AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{1}$ für alle $B \in K^{3 \times 3}$,

und allgemein für $A \in K^{n \times n}$: wenn A eine Nullzeile hat, dann ist A nicht invertierbar (singulär).

Satz I.6 A invertierbar $\Leftrightarrow$ Die red. Zeilenstufenform von A ist $\mathbf{1}$.

Satz I.7 Die Inverse B einer invertierbaren Matrix A ist eindeutig.

Satz I.8 Sind $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbar, so auch

- i) A^{-1} mit $(A^{-1})^{-1} = A$ ii) AB mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Satz I.9 Sind die angegebenen Matrixoperationen ausführbar, so gilt:

- i) $(A^T)^T = A$ ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$ iii) $(kA)^T = kA^T, k \in K$
iv) $(AB)^T = B^T A^T$ v) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

zu iv)

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1j} & \dots & b_{rj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & c_{ij} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{-te Zeile} \\ \\ j\text{-te Spalte} \end{matrix} \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \text{Transponierung} \\
 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1j} & \dots & b_{rj} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1r} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ c_{ij} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{-te Spalte} \\ \\ j\text{-te Zeile} \end{matrix} \\
 B^T \quad A^T = C^T = (AB)^T \\
 \sum_{k=1}^r b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} = c_{ij}
 \end{array}$$

5. Elementarmatrizen

Eine Methode zur Herstellung der Inversen A^{-1} einer regulären Matrix A durch

	Multiplikation von Elementarmatrizen	E_i	$\triangleq$	elementare Zeilenumformungen
	$\boxed{(A \mid \mathbf{1})}$		$=$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 & 0 \\ 4 & 3 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II \end{matrix}$
		$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\triangleq$	$II + (-4)I = II^*$
$\Leftrightarrow$	$\boxed{(E_1 A \mid E_1 \mathbf{1})}$		$=$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 & 0 \\ 0 & -5 & & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II^* \end{matrix}$
		$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\triangleq$	$I + 2/5 II^* = I^*$
$\Leftrightarrow$	$\boxed{(E_2 E_1 A \mid E_2 E_1 \mathbf{1})}$		$=$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & -3/5 & 2/5 \\ 0 & -5 & & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I^* \\ II^* \end{matrix}$
		$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{pmatrix}$	$\triangleq$	$-1/5 II^* = II^{**}$
$\Leftrightarrow$	$\boxed{(E_3 E_2 E_1 A \mid E_3 E_2 E_1 \mathbf{1})}$		$=$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & & 4/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{matrix} I^* \\ II^{**} \end{matrix}$
$\Leftrightarrow$	$\boxed{(\mathbf{1} \mid A^{-1})}$			
	A^{-1}		$=$	$\frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

4. Extrablatt zur Linearen Algebra 1

z. B. i) Bestimme eine Basis und die Dimension des Zeilen-, Spalten- und Nullraumes von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6) \quad \text{und des Nullraumes von } A^T.$$

Lösung: A lässt sich durch elementare Zeilenoperationen auf die Zeilenstufenform

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{pmatrix} = (c'_1 \ c'_2 \ c'_3 \ c'_4 \ c'_5 \ c'_6) \text{ bringen.}$$

$$\begin{aligned} r'_1 &= (1 \ -3 \ 4 \ -2 \ 5 \ 4) \\ \alpha) \text{ Die Vektoren } r'_2 &= (0 \ 0 \ 1 \ 3 \ -2 \ -6) \\ r'_3 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{bilden eine Basis von Zeilenr}(A). \\ &3 = \dim \text{Zeilenr}(A') = \dim \text{Zeilenr}(A) \end{aligned}$$

$$\beta) \text{ Die Vektoren } c'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c'_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c'_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{bilden eine Basis von Spaltenr}(A'). \\ &3 = \dim \text{Spaltenr}(A') = \dim \text{Spaltenraum}(A) \end{aligned}$$

Die entsprechenden Spalten von A

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{bilden eine Basis von Spaltenr}(A).$$

$\gamma)$ Aus A' folgt $x_6 = r$, $x_5 = -5r$, $x_4 = s$, $x_3 = -3s - 4r$, $x_2 = t$, $x_1 = 3t + 14s + 37r$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + 14s + 37r \\ t \\ -3s - 4r \\ s \\ -5r \\ r \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 37 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = t v_1 + s v_2 + r v_3 \quad \begin{aligned} &\{v_1, v_2, v_3\} \text{ ist Basis von Nullr}(A). \\ &3 = \dim \text{Nullr}(A') = \dim \text{Nullr}(A) \end{aligned}$$

$\delta)$ Übung

ii) $\alpha)$ Man bestimme eine Teilmenge S der Vektoren

$$v_1 = (1, -2, 0, 3), \quad v_2 = (2, -5, -3, 6), \quad v_3 = (0, 1, 3, 0), \quad v_4 = (2, -1, 4, -7), \quad v_5 = (5, -8, 1, 2),$$

sodass S eine Basis von $\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ist.

$\beta)$ Man stelle die verbleibenden Vektoren als Linearkombinationen der Basisvektoren dar.

Lösung $\alpha)$: Wir betrachten die Matrix mit den Spaltenvektoren $v_1, v_2, \dots, v_5$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \text{ und bestimmen eine Basis ihres Spaltenraumes. Als red. ZStF ergibt sich}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit den Spaltenvektoren } w_1, w_2, \dots, w_5.$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{matrix}$$

Dann ist $\{w_1, w_2, w_4\}$ eine Basis des Spaltenraumes von A' , die entsprechenden Vektoren $\{v_1, v_2, v_4\}$ sind dann die gesuchte Basis der linearen Hülle von $v_1, v_2, \dots, v_5$.

$\beta)$: Wir schreiben zunächst w_3 und w_5 als Linearkombination von w_1, w_2 und w_4 .

$$\begin{aligned} w_3 &= 2w_1 - w_2 & w_5 &= w_1 + w_2 + w_4, \text{ woraus sich sofort die gewünschte Darstellung} \\ v_3 &= 2v_1 - v_2 & v_5 &= v_1 + v_2 + v_4 \text{ ergibt.} \end{aligned}$$

iii) Indicate whether the statement is always true or sometimes false. Justify your answer by giving a logical argument or a counterexample.

$\alpha)$ If E is an elementary matrix, then A and EA must have the same nullspace.

$\beta)$ If E is an elementary matrix, then A and EA must have the same row space.

$\gamma)$ If E is an elementary matrix, then A and EA must have the same column space.

$\delta)$ If $Ax = b$ does not have any solutions, then b is not in the column space of A .

$\epsilon)$ The row space and nullspace of an invertible matrix are the same.

$\zeta)$ If A is not square, then the row vectors of A must be linearly dependent.

$\eta)$ If A is square, then either the row vectors or the column vectors of A must be linearly independent.

$\theta)$ If the row vectors and the column vectors of A are linearly independent, then A must be square.

5. Ad-hoc-Ergänzung

Aufgaben aus "Lineare Algebra: Einführung, Grundlagen, Übungen" – Howard Anton, 1998, S. 308, 279

Ergänzende Übungen zu Kapitel 5 (S. 308)

14. Sei S eine Basis des Vektorraumes V . Man zeige, dass für alle Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ und alle Skalare k gilt:

$$\text{a) } (\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S \quad \text{b) } (k\mathbf{u})_S = k(\mathbf{u})_S$$

Übungen zu 5.4

24. Sei S eine Basis des n -dimensionalen Vektorraumes V .
 Man zeige, dass $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ genau dann linear unabhängig in V sind, wenn ihre Koordinatenvektoren $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ sind.
25. Seien S und V wie in Aufgabe 24 gegeben.
 Man zeige, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ genau dann ein Erzeugendensystem von V ist, wenn $\{(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S\}$ den $\mathbb{R}^n$ aufspannt.

Lösungen

aus "Elementary Linear Algebra" – Howard Anton / Chris Rorres – 8th E, 2000, Student Solutions Manual, p. 234 f.

Exercise Set 5.4

24. First notice that if $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ are vectors in V and a and b are scalars, then $(a\mathbf{v} + b\mathbf{w})_S = a(\mathbf{v})_S + b(\mathbf{w})_S$. This follows from the definition of coordinate vectors. Clearly, this result applies to any finite sum of vectors. Also notice that if $(\mathbf{v})_S = (\mathbf{0})_S$, then $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Why?

$$\begin{aligned} \text{Now suppose that } k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r &= \mathbf{0}. \text{ Then} \\ (k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r)_S &= k_1(\mathbf{v}_1)_S + \dots + k_r(\mathbf{v}_r)_S \\ &= (\mathbf{0})_S \end{aligned}$$

$$\text{Conversely, if } k_1(\mathbf{v}_1)_S + \dots + k_r(\mathbf{v}_r)_S = (\mathbf{0})_S, \text{ then} \\ (k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r)_S = (\mathbf{0})_S, \text{ or } k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Thus the vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ are linearly independent in V if and only if the coordinate vectors $(\mathbf{v}_1)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S$ are linearly independent in $\mathbb{R}^n$.

25. If every vector $\mathbf{v}$ in V can be written as a linear combination $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_r\mathbf{v}_r$ of $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, then, as in Exercise 24, we have $(\mathbf{v})_S = a_1(\mathbf{v}_1)_S + \dots + a_r(\mathbf{v}_r)_S$. Hence, the vectors $(\mathbf{v}_1)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S$ span a subspace of $\mathbb{R}^n$. But since V is an n -dimensional space with, say, the basis $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, then if $\mathbf{u} = b_1\mathbf{u}_1 + \dots + b_n\mathbf{u}_n$, we have $(\mathbf{u})_S = (b_1, \dots, b_n)$; that is, every vector in $\mathbb{R}^n$ represents a vector in V . Hence $\{(\mathbf{v}_1)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S\}$ spans $\mathbb{R}^n$.

Conversely, if $\{(\mathbf{v}_1)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S\}$ spans $\mathbb{R}^n$, then for every vector $(b_1, \dots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$, there is an r -tuple $(a_1, \dots, a_r)$ such that

$$\begin{aligned} (b_1, \dots, b_n) &= a_1(\mathbf{v}_1)_S + \dots + a_r(\mathbf{v}_r)_S \\ &= (a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_r\mathbf{v}_r)_S \end{aligned}$$

Thus $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_r\mathbf{v}_r = b_1\mathbf{u}_1 + \dots + b_n\mathbf{u}_n$, so every vector in V can be represented as a linear combination of $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$.

Ergo: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ Basis von $V \Leftrightarrow \dots$

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 1

1. Für welche(s) k hat das folgende Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen?
(1.1.8)

$$\begin{aligned}x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k\end{aligned}$$

2. Betrachten Sie das Gleichungssystem
(1.1.9, A.)

$$\begin{aligned}ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= m\end{aligned}$$

Welche Lage müssen die Geraden $ax + by = k$, $cx + dy = l$ und $ex + fy = m$ zueinander haben, wenn das System

- a) keine Lösung b) genau eine Lösung c) unendlich viele Lösungen besitzt?

3. Zeigen Sie: Wenn das Gleichungssystem aus Übung 2 konsistent ist, kann mindestens eine der Gleichungen weggelassen werden, ohne die Lösungsmenge zu ändern.
(1.1.10, A.)

4. Die folgenden Matrizen sind auf reduzierte Zeilenstufenform gebrachte erweiterte Matrizen von linearen Gleichungssystemen. Lösen Sie das zugehörige System.
(1.2.4, A.)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Lösen Sie die Systeme durch Gauß-Elimination.
(1.2.8, A.)

a) $\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30\end{aligned}$

c) $\begin{aligned}4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6\end{aligned}$

d) $\begin{aligned}10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z &= 1\end{aligned}$

6. a) $\begin{aligned}5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5\end{aligned}$
(1.2.10)

Das griechische Alphabet

Druckschrift

Kleinbuchstaben	Großbuchstaben	Laut	Namen
α	Α	ǎ, ā	ἄλφα Alpha
β	Β	b	βῆτα Beta
γ	Γ	g	γάμμα Gamma
δ	Δ	d	δέλτα Delta
ε	Ε	ě	ἔ ψιλόν Epsilon
ζ	Ζ	ds	ζῆτα Zeta
η	Η	ǎ	ῆτα Eta
θ	Θ	t ^h	θῆτα Theta
ι	Ι	ĩ, ī	ἰῶτα Iota
κ	Κ	k	κάππα Kappa
λ	Λ	l	λάμβδα Lambda
μ	Μ	m	μῦ My
ν	Ν	n	νῦ Ny
ξ	Ξ	ks	ξῖ Xi
ο	Ο	ö	ὀ μικρόν Omikron
π	Π	p	πῖ Pi
ρ ¹⁾	Ρ ¹⁾	r	ῥῶ Rho
σ, ς ²⁾	Σ	s	σῖγμα Sigma
τ	Τ	t	ταῦ Tau
υ	Υ	ǔ, ū	ῥ ψιλόν Ypsilon
φ	Φ	p ^{h3)}	φῖ Phi
χ	Χ	k ^{h4)}	χῖ Chi
ψ	Ψ	ps	ψῖ Psi
ω	Ω	ō ⁵⁾	ὦ μέγα Omega

1) Am Wortanfang: ρ, Ρ

2) Im Anlaut und Inlaut steht σ, am Wortende ς.

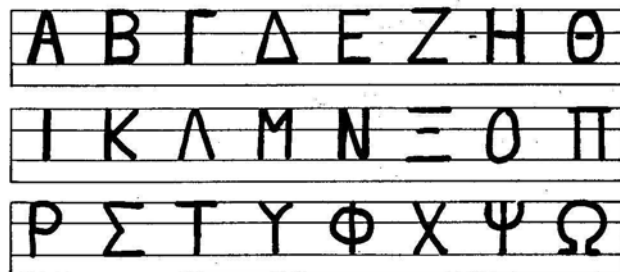
3) Schulaussprache: f

4) Schulaussprache: ch

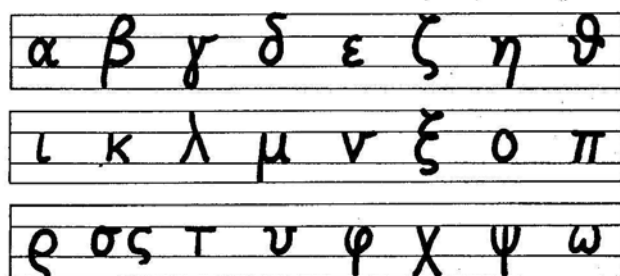
5) geschlossen

Schreibschrift

Großbuchstaben

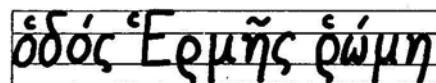


Kleinbuchstaben

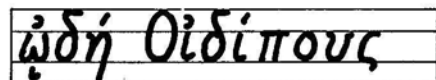


Spiritus und Iota subscriptum

Spiritus asper: •

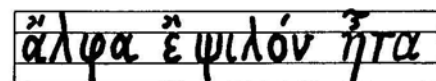


Spiritus lenis: •



Akzente

Akut •
Gravis •
Zirkumflex ~

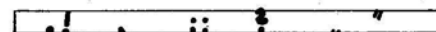


Satzzeichen

griechischer Text



deutscher Text



Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 2

07. Für die Matrizen
(1.3.2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

berechne man (falls möglich) die folgenden Ausdrücke:

- | | | | | |
|------------|---------------|----------------|------------------|-----------------------|
| a) $D + E$ | b) $D - E$ | c) $5A$ | d) $-7C$ | e) $-3(D + 2E)$ |
| f) $A - A$ | g) $2A^T + C$ | h) $D^T - E^T$ | i) $(D^T - E^T)$ | j) $(2E^T - 3D^T)^T$ |
| k) AB | l) BA | m) $(3E)D$ | n) $(AB)C$ | o) $A(BC)$ |
| p) CC^T | q) $(DA)^T$ | r) $(C^TB)A^T$ | s) $(2D^T - E)A$ | t) $B^T(CC^T - A^TA)$ |

08. Betrachten Sie die Matrix
(1.4.13)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, und berechnen Sie ihre Inverse.

09. Eine quadratische Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn $A^T = A$ gilt.
(1.4.21)

Zeigen Sie für eine quadratische Matrix B :

BB^T und $B + B^T$ sind symmetrisch.

10. Berechnen Sie die Inverse der gegebenen Matrix, sofern das möglich ist, und überprüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren.
(1.5.5-7)

- | | | | |
|---|--|--|---|
| a) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ | b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ | c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ | d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| e) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ | f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ | h) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ | j) $\begin{pmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ | k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ | |

- 11.** (1.5.8b+c) Ermitteln Sie die Inversen der folgenden 4 x 4-Matrizen, wobei k_1, k_2, k_3, k_4 und k von Null verschiedene Skalare sind.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

- 12.** (1.6.20) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $Ax = x$ auch als $(A - \mathbf{1})x = 0$ geschrieben werden kann und lösen Sie sie dann nach x auf.
b) Lösen Sie $Ax = 4x$.

- 13.** (1.7.27) Ersinnen und beweisen Sie ein Theorem, welches beschreibt, wie zwei Diagonalmatrizen multipliziert werden.

- 14.** (1.7.30) Geben Sie an, ob die Aussage immer wahr oder manchmal falsch ist. Begründen Sie jede Antwort.

- a) Wenn AA^T singulär ist, dann ist A es auch.
b) Wenn $A + B$ symmetrisch ist, dann sind A und B es auch.
c) Wenn A eine $n \times n$ -Matrix ist und $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat, dann gilt dasselbe für $A^T x = 0$.
d) Wenn A^2 symmetrisch ist, dann ist A es auch.

Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 0 & ? & 0 & ? & \dots & 0 & ? \\ & 1 & ? & 0 & ? & \dots & 0 & 0 & ? \\ & & 1 & ? & \dots & 0 & 0 & 0 & ? \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & ? \\ & & & & & & 1 & ? & \end{pmatrix}$$

Alle Nullzeilen stehen unten und zusammen.

Jede **Zeile**, die nicht nur Nullen enthält, beginnt mit einer führenden Eins.

Die führenden Einsen verlaufen von links oben in der ersten Zeile nach rechts unten.

Jede **Spalte** mit einer führenden Eins enthält nur noch Nullen.

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 3

15. Sei
(1.EÜ.7)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

die erweiterte Matrix eines linearen Systems. Für welche a und b hat das System

- a) eine eindeutige, b) eine einparametrische,
c) eine zweiparametrische d) keine Lösung?

16. Man löse nach x , y und z auf.
(1.EÜ.8)

$$\begin{aligned} xy - 2\sqrt{y} + 3zy &= 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2zy &= 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2zy &= 4 \end{aligned}$$

17. Wie viele Multiplikationen und Additionen sind notwendig, um das Matrixprodukt AB eine $m \times n$ -Matrix A und einer $n \times p$ -Matrix B zu berechnen?
(1.EÜ.13)

18. Es bezeichne $\mathbf{1}_n$ die n -reihige Einheitsmatrix, $\mathbf{J}_n$ die gleichgroße Matrix mit lauter Einsen. Beweisen Sie die Formel
(1.EÜ.17)

$$(\mathbf{1}_n - \mathbf{J}_n)^{-1} = \mathbf{1}_n - \frac{1}{n-1} \mathbf{J}_n.$$

19. Gegeben sei das Polynom $f(x) := x^3 + 4x^2 - 2x + 7$. A bezeichne eine Matrix aus $\mathbb{Q}^{n \times n}$. Beweisen Sie:
(1.EÜ.18)

Ist $f(A) = 0$, so ist auch $f(A^T) = 0$.

20. Es bezeichnen A und B quadratische Matrizen aus $\mathbb{Q}^{n \times n}$, B sei invertierbar.
(1.EÜ.19) Beweisen Sie die Äquivalenz der Gleichungen $AB = BA$ und $AB^{-1} = B^{-1}A$.

21. Beweisen Sie: Ist A eine invertierbare Matrix, so sind die Matrizen $A + B$ und $\mathbf{1} + BA^{-1}$ entweder beide invertierbar oder beide nicht invertierbar.
(1.EÜ.20)

22. Zeigen Sie für Matrizen $A, B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sp}(A+B) &= \operatorname{sp}(A) + \operatorname{sp}(B) & \text{b) } \operatorname{sp}(cA) &= c \operatorname{sp}(A) \\ \text{c) } \operatorname{sp}(A^T) &= \operatorname{sp}(A) & \text{d) } \operatorname{sp}(AB) &= \operatorname{sp}(BA) \end{aligned}$$

(1.EÜ.21+22)

Zeigen Sie ferner dass stets $AB - BA \neq \mathbf{1}$ ist.

23. Es sei $p \in \mathbb{Q}^{n \times 1}$ mit $p^T p = 1$. Wir bilden damit die Matrix $H(p) := \mathbf{1}_n - 2p p^T$.
(1.EÜ.27)

a) Weisen Sie die Gültigkeit der Gleichungen $H = H^T$ und $H^T H = \mathbf{1}_n$ nach.
b) Verifizieren Sie diese Gleichungen für

$$H(p) \text{ mit } p^T := \frac{1}{12}(9, 2, 3, 5, 5)$$

Übungen zur Linearen Algebra I

Studiengang Mathematik, Blatt 4

24. Bestimmen Sie alle λ , für die $\det(A) = 0$ ist.
(2.1.13)

a)
$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

25. Zeigen Sie, dass die Matrizen
(2.1.20)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

genau dann kommutieren, wenn $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$ gilt.

26. Berechnen Sie mit Hilfe der Determinantendefinition:
(2.1.17)

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

27. Berechnen Sie jeweils die Determinante
(2.2.4-11) durch Reduktion der gegebenen Matrix auf Zeilenstufenform.

a)
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

f)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

g)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

h)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

28.
(2.2.12)

Berechnen Sie für

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}.$

Quelle: H. Anton (2000), Elementary Linear Algebra

29.
(2.2.18)

a) Betrachten Sie die Gleichung und finden Sie zwei Lösungen dazu:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

b) Gibt es möglicherweise andere Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

30.

Berechnen Sie den Wert der Determinante der folgenden Matrizen:

a) $\overline{\overline{M}}_9 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{16} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 \\ 12 & 13 & 14 & 11 \\ 9 & 16 & 15 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},$

$$\overset{\cup}{M}_{16} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 14 & 11 \\ 12 & 13 & 3 & 6 \\ 9 & 16 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 15 & 10 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{M}}_{16} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 4 & 11 \\ 12 & 3 & 13 & 6 \\ 9 & 2 & 16 & 7 \\ 8 & 15 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

b) $M_{3 \times 3}$: Entsteht aus $M_{16}, \overset{\cup}{M}_{16}, \overline{\overline{M}}_{16}$ durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

31.
(2.4.06)

Man zeige mit Hilfe von Determinanten, dass das System

$$\begin{aligned} x - 2y &= \lambda x \\ x - y &= \lambda y \end{aligned}$$

für alle λ nur die triviale Lösung $x = 0, y = 0$ hat.

Übungs-Extrablatt zur Linearen Algebra I

Studiengang Mathematik, Blatt 5

- 32.** i) Welche Elementarmatrizen $E \in K^{n \times n}$ sind symmetrisch?
 ii) Wie ändert sich $A \in K^{n \times n}$, wenn mit symmetrischen Elementarmatrizen $E \in K^{n \times n}$ AE gebildet wird?
 iii) Für welche Elementarmatrizen gilt $EE = \mathbf{1}$?

- 33.** Man gebe eine Formel für die Inverse von EA an, wenn E zwei Zeilen vertauscht.
Hinweis: Theorem II.11

- 34.** Begründen Sie mit Hilfe von elem. Z-Umf., dass die Inverse von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$.

Hinweis: $(A \ \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{1} \ A^{-1})$

- 35.** Man bestimme die Eigenräume $\text{Eig}(A\lambda) = \{x \mid x \in K^n, Ax = \lambda x\}$ der linearen Abbildung
 (Transformation) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \ x \mapsto T(x) = Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Man vergleiche das Ergebnis mit Aufg. 12, Blatt 2.

zu Aufgabe 30:

$\text{adj}(A)$	$\cdot$	A	$= \det(A) \cdot \mathbf{1}$
-----------------	---------	-----	------------------------------

a)
$$\begin{pmatrix} -7 & 68 & -37 \\ -22 & 8 & 38 \\ 53 & -52 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} = 8 \left(\sum_{i=1}^9 i \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\left(\sum_{i=1}^{16} i \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 \\ 12 & 13 & 14 & 11 \\ 9 & 16 & 15 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

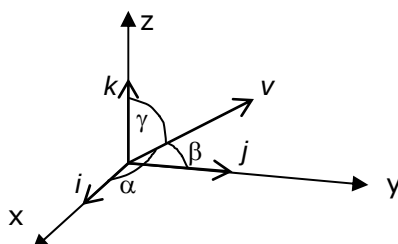
$$\left(\sum_{i=1}^{16} i \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \\ -7 & -7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 14 & 11 \\ 12 & 13 & 3 & 6 \\ 9 & 16 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 15 & 10 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{16} i \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 5 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 14 & 4 & 11 \\ 12 & 3 & 13 & 6 \\ 9 & 2 & 16 & 7 \\ 8 & 15 & 1 & 10 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 6

- 36.** Seien $u = (4, 1, 2, 3)$, $v = (0, 3, 8, -2)$ und $w = (3, 1, 2, 2)$.
(4.1.6) Berechnen Sie die Ausdrücke
- i) $\|u + v\|$ ii) $\|u\| + \|v\|$ iii) $\|-2u\| + 2\|u\|$
- iv) $\|3u - 5v + w\|$ v) $\frac{1}{\|w\|}w$ vi) $\left\|\frac{1}{\|w\|}w\right\|$
- 37.** Zeigen Sie, dass es unendlich viele Einheitsvektoren im R^3 gibt, deren
(4.1.10b) Skalarprodukt mit $(1, -3, 5)$ null ist.
- 38.** Bestimmen Sie zwei Vektoren der Länge 1, die zu $u = (2, 1, -4, 0)$,
(4.1.16) $v = (-1, -1, 2, 2)$ und $w = (3, 2, 5, 4)$ orthogonal sind.
- 39.** Sei $\|u + v\| = 1$ und $\|u - v\| = 5$. Berechnen Sie $u \cdot v$.
(4.1.20)
- 40.** Beweisen und interpretieren Sie die Gleichung
(4.1.22) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ für Vektoren im R^n .
- 41.** Man zeige für $u, v, v_1, \dots, v_r \in R^n$
(4.1.24) i) $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Satz d. Pyth.) ii) $\bigwedge_{\substack{1 \leq i, j \leq r \\ i \neq j}} v_i \perp v_j \Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^r v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^r \|v_i\|^2$
- 42.** Zeigen Sie mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung: Für alle reellen Zahlen
(4.1.26) a, b und θ gilt $[a \cos \theta + b \sin \theta]^2 \leq a^2 + b^2$.
- 43.** Man berechne die Orthogonalprojektion von u auf a .
(3.3.4, 5) i) $u = (6, 2), a = (3, -9)$ ii) $u = (-1, -2), a = (-2, 3)$
iii) $u = (3, 1, -7), a = (1, 0, 5)$ iv) $u = (1, 0, 0), a = (4, 3, 8)$
Man finde die Vektorkomponente von u senkrecht zu a .
- 44.** Man zeige, dass die Punkte $A(3, 0, 2)$, $B(4, 3, 0)$ und $C(8, 1, -1)$ ein recht-
(3.3.12) winkliges Dreieck aufspannen. An welcher Ecke liegt der rechte Winkel?
- 45.** Seien $a \cdot b = a \cdot c$ für $a \neq 0$. Folgt daraus $b = c$?
(3.3.13)
- 46.** Seien $p = (2, k)$ und $q = (3, 5)$. Man bestimme k so, dass p und q
(3.3.14) i) parallel sind, ii) orthogonal sind,
iii) den Winkel $\frac{\pi}{3}$ einschließen, iv) den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen.
- 47.** Seien i, j und k Einheitsvektoren in Richtung der positiven x-, y- und z-Achse
(3.3.19) eines rechtwinkligen Koordinatensystems im Raum. Die Winkel α, β und γ
zwischen einem Vektor $v = (a, b, c) \neq 0$ und i, j und k heißen Richtungswinkel
von v ; $\cos \alpha, \cos \beta$ und $\cos \gamma$ werden als Richtungskosinus bezeichnet.
Man zeige
- i) $\frac{v}{\|v\|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, ii) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.



Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 7

- 48.**
(3.4.12) Man bestimme alle zur yz -Ebene parallelen Einheitsvektoren, die orthogonal zu $(3, -1, 2)$ sind.
- 49.**
(3.4.15) Man vereinfache den Ausdruck $(u + v) \times (u - v)$.
- 50.**
(3.4.18) Man betrachte eine Gerade und einen Punkt P , der nicht auf ihr liegt. Man zeige: Ist u ein Verbindungsvektor von einem Punkt der Geraden zu P und v ein zur Geraden paralleler Vektor, so ist $\|u \times v\| / \|v\|$ der Abstand von der Geraden zu P .
- 51.**
(3.4.21) Man betrachte das Parallelepiped mit den Kanten $u = (3, 2, 1)$, $v = (1, 1, 2)$ und $w = (1, 3, 3)$.
- i) Man bestimme den Flächeninhalt der von u und w aufgespannten Seite.
ii) Man berechne den Winkel zwischen u und der von v und w aufgespannten Ebene. [Hinweis: Man betrachte die Winkel, die u mit in der Ebene liegenden Vektoren $u - \text{proj}_{v \times w} u$ und $-(u - \text{proj}_{v \times w} u)$ einschließt. Der gesuchte Winkel θ erfüllt dann die Ungleichung $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.]
- 52.**
(3.4.22) Man bestimme einen Vektor n , der zur von den Punkten $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$ und $C(-1, 1, 0)$ aufgespannten Ebene senkrecht ist.
- 53.**
(3.4.26) Man beweise $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$. [Hinweis: Man betrachte zuerst die Fälle $w = i = (1, 0, 0)$, $w = j = (0, 1, 0)$ und $w = k = (0, 0, 1)$. Man beweise dann den allgemeinen Fall $w = (w_1, w_2, w_3)$ mit der Darstellung $w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$.]
- 54.**
(3.4.27) Man beweise $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$. [Hinweis: Man wende $u \times v = -(v \times u)$ auf $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ an.]
- 55.**
(3.4.39) Was kann über die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ gesagt werden, wenn $u \times v = 0$ ist?
- 56.**
(3.5.21) Man gebe eine Gleichung der zu $5x - 2y + z - 5 = 0$ parallelen Ebene, die durch den Punkt $(3, -6, 7)$ verläuft, an.
- 57.**
(3.5.23) Man bestimme eine Gleichung für die Ebene, die senkrecht zu $2x - 4y + 2z = 9$ verläuft und die Gerade $x = -1 + 3t$, $y = 5 + 2t$, $z = 2 - t$ enthält.
- 58.**
(3.5.26) Man bestimme Parametergleichungen der Geraden durch $(-2, 5, 0)$, die parallel zu den Ebenen $2x + y - 4z = 0$ und $-x + 2y + 3z + 1 = 0$ liegt.
- 59.**
(3.5.34) Man zeige, dass die Gerade
 $x - 5 = -t$, $y + 3 = 2t$, $z + 1 = -5t$ ($-\infty < t < +\infty$)
parallel zur Ebene $-3x + y + z - 9 = 0$ liegt.
- 60.**
(3.5.47) Welche Beziehung besteht zwischen
der Geraden $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$
und der Ebene $ax + by + cz = 0$?

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 8

- 61.** Sei A eine 2×2 -Matrix mit $\det(A) = 1$, deren Spalten orthogonale Einheitsvektoren sind. Man kann zeigen, dass die Multiplikation mit A eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ erzeugt.

(4.2.26)

Zeigen Sie, dass $A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ die gegebenen Voraussetzungen erfüllt und bestimmen Sie den Rotationswinkel θ .

- 62.** Das Ergebnis aus Aufgabe 61 gilt auch im $\mathbb{R}^3$:

(4.2.27)

Ist A eine 3×3 -Matrix mit $\det(A) = 1$, deren Spalten paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind, so beschreibt die Multiplikation mit A eine Rotation. Zeigen Sie mit

$$A = \begin{bmatrix} a^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & ab(1 - \cos \theta) - c \sin \theta & ac(1 - \cos \theta) + b \sin \theta \\ ab(1 - \cos \theta) + c \sin \theta & b^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & bc(1 - \cos \theta) - a \sin \theta \\ ac(1 - \cos \theta) - b \sin \theta & bc(1 - \cos \theta) + a \sin \theta & c^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{bmatrix} \text{ für } \|(a, b, c)\| = 1,$$

dass der Drehwinkel θ die Gleichung $\cos \theta = \frac{\text{sp}(A) - 1}{2}$ erfüllt.

- 63.** Erfüllt A die Voraussetzungen von Aufgabe 62, so beschreibt für jeden beliebigen Vektor $x \neq 0$ $u = Ax + A^T x + [1 - \text{sp}(A)]x$ die Rotationsachse, wenn u mit seinem Anfangspunkt im Ursprung liegt.

(4.2.28)

i) Zeigen Sie, dass $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$ die Darstellungsmatrix einer Rotation im $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimmen Sie einen Einheitsvektor, der die Rotationsachse beschreibt.

iii) Berechnen Sie den Drehwinkel um die ermittelte Achse.

- 64.** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(4.3.14)

- i) T spiegelt Vektoren an der xz -Ebene und staucht das Ergebnis um den Faktor $k = \frac{1}{5}$,
ii) T projiziert jeden Vektor erst auf die xz - und dann auf die xy -Ebene,
iii) T spiegelt einen Vektor zuerst an der xy -, dann an der xz - und schließlich an der yz -Ebene.

- 65.** i) Ist die Komposition injektiver Transformationen injektiv?

(4.3.20)

ii) Kann die Komposition einer injektiven mit einer nichtinjektiven linearen Transformation injektiv sein?

- 66.** i) Beweisen Sie die Linearität der Transformation $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

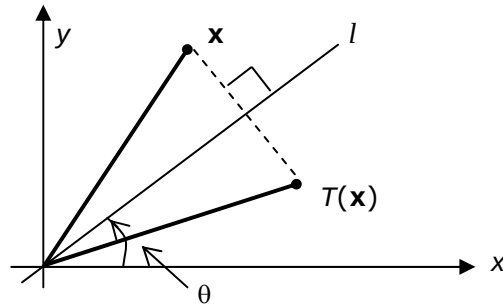
$$r \mapsto T(r) = r - 2 \frac{(n \cdot r)}{\|n\|^2} n.$$

- ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A = [T] = (T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3))$ für $n = e_3$ und $n = (1, -1, 0)$.

iii) Begründen Sie, dass die obige angegebene lineare Transformation T eine Spiegelung an der Ebene beschreibt, die den Nullpunkt enthält und durch den Normalenvektor n festgelegt ist.

67.
(4.3.23)

Es sei l die Gerade in der xy -Ebene, die durch den Ursprung verläuft und mit der positiven x -Achse den Winkel θ ($0 \leq \theta < \pi$) einschließt, und sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an l .



Bestimme die Standarddarstellungsmatrix von T .

68.
(4.3.24)

Beweise: Für einen linearen Operator $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind die Aussagen
 $\alpha)$ T injektiv $\beta)$ T surjektiv $\gamma)$ T bijektiv äquivalent.

69.
(4.3.25)

Indicate whether the statement is always true or sometimes false. Justify your answer by giving argument or a counterexample.

- i) If T maps $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^m$, and $T(0) = 0$, then T is linear.
- ii) If $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a one-to-one linear transformation, then there are no distinct vectors u and v in $\mathbb{R}^n$ such that $T(u - v) = 0$.
- iii) If $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a linear operator, and if $T(x) = 2x$ for some vector x , then $\lambda = 2$ is an eigenvalue of T .
- iv) If T maps $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^m$, and if $T(c_1u + c_2v) = c_1T(u) + c_2T(v)$ for all scalars c_1 and c_2 and for all vectors u and v in $\mathbb{R}^n$, then T is linear.

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 9

Überprüfen Sie für die Mengen in den Aufgaben 70 und 71 alle Vektorraumaxiome.

70. Alle Paare (x, y) reeller Zahlen, für die $x \geq 0$ gilt, mit den Standardoperationen des $\mathbb{R}^2$.
(5.1.6)

71. Die 2×2 -Matrizen $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ mit der bekannten Matrixaddition und skalaren Multiplikation
(5.1.10) aus Kapitel I.

72. Zeigen Sie, dass die positiven reellen Zahlen mit den Operationen
(5.1.15) $x \oplus y := xy$ und $k \odot x := x^k$ einen Vektorraum bilden.

73. Schreiben Sie die Polynome als Linearkombination von $p_1 = 2 + x + 4x^2$,
(5.2.9) $p_2 = 1 - x + 3x^2$ und $p_3 = 3 + 2x + 5x^2$:

i) $-9 - 7x - 15x^2$ ii) $6 + 11x + 6x^2$ iii) 0 iv) $7 + 8x + 9x^2$

74. Welche der Matrizen lassen sich als Linearkombination von

(5.2.10) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ darstellen?

i) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

75. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden.
(5.2.11)

- i) $v_1 = (2, 2, 2)$, $v_2 = (0, 0, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1)$
ii) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 2)$, $v_3 = (8, -1, 8)$
iii) $v_1 = (3, 1, 4)$, $v_2 = (2, -3, 5)$, $v_3 = (5, -2, 9)$, $v_4 = (1, 4, -1)$
iv) $v_1 = (1, 2, 6)$, $v_2 = (3, 4, 1)$, $v_3 = (4, 3, 1)$, $v_4 = (3, 3, 1)$

76. Seien $v_1 = (2, 1, 0, 3)$, $v_2 = (3, -1, 5, 2)$ und $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Welche Vektoren
(5.2.14) liegen in $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$?

i) $(2, 3, -7, 3)$ ii) $(0, 0, 0, 0)$ iii) $(1, 1, 1, 1)$ iv) $(-4, 6, -13, 4)$

77. Beweisen Sie Satz (Anton) 5.2.4 (Satz V.5 aus der Vorlesung).
(5.2.18)

78. Zeigen Sie mit Satz (Anton) 5.2.4 (Satz V.5 aus der Vorlesung), dass
(5.2.19) $v_1 = (1, 6, 4)$, $v_2 = (2, 4, -1)$, $v_3 = (-1, 2, 5)$ und $w_1 = (1, -2, -5)$, $w_2 = (0, 8, 9)$
denselben Unterraum von $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

79. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von $F(-\infty, \infty)$ sind:
(5.2.21)

- i) Die stetigen Funktionen,
ii) die differenzierbaren Funktionen,
iii) die differenzierbaren Funktionen mit $f' + 2f = 0$.

80. Zeigen Sie, dass $V = P(M)$ = Potenzmenge einer Menge M ein K -Vektorraum ist mit
 $K = \{0, 1\}$ und $A + B := A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $1A := A$, $0A := \emptyset$.

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 10

81. Für welche λ sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

(5.3.8)

$$\mathbf{v}_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right) \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$$

82. Beweisen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge einer linear unabhängigen Menge

(5.3.10) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ selbst linear unabhängig ist.

83. Sei $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ eine linear abhängige Teilmenge des Vektorraums V , und es

(5.3.12) seien $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ beliebige Vektoren aus V . Zeigen Sie, dass

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ linear abhängig ist.

84. Wann ist eine einelementige Menge linear unabhängig?

(5.3.17)

85. Zeigen Sie, dass die Funktionen linear unabhängig sind.

(5.3.20)

i) $1, x, e^x$ ii) $\sin x, \cos x, x \sin x$ iii) e^x, xe^x, x^2e^x iv) $1, x, x^2$

86. Sei $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ mit $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \sin^2 x$ und $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

(5.4.6)

i) Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ keine Basis von V ist.

ii) Bestimmen Sie eine Basis von V .

87. Sei $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ eine Basis des Vektorraumes V , und seien $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

(5.4.22) und $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ eine Basis von V ist.

88. Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle folgender Vektoren in P_2 .

(5.4.26)

i) $-1 + x - 2x^2, 3 + 3x + 6x^2, 9$ ii) $1 + x, x^2, -2 + 2x^2, -3x$

iii) $1 + x - 3x^2, 2 + 2x - 6x^2, 3 + 3x - 9x^2$

89. Geben Sie eine Basis des Nullraumes von A an.

(5.5.6)

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{v) } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

90. Bestimmen Sie Basen für die Zeilenräume der Matrizen aus Aufgabe 89 (5.5.6).
(5.5.8)

91. Bestimmen Sie Basen für die Spaltenräume der Matrizen aus Aufgabe 89 (5.5.6).
(5.5.9)

92. Bestimmen Sie Basen für die Zeilenräume der Matrizen aus Aufgabe 89 (5.5.6),
(5.5.10) die nur Zeilenvektoren von A enthalten.

93. Bestimmen Sie eine Teilmenge der gegebenen Vektoren, die eine Basis des auf-
(5.5.12) gespannten Raumes ist, und stellen Sie die übrigen Vektoren als Linearkombinationen
dieser Basis dar.

i) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (-3, 3, 7, 1), \mathbf{v}_3 = (-1, 3, 9, 3), \mathbf{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$

ii) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 6), \mathbf{v}_3 = (-1, 1, 2, 0), \mathbf{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$

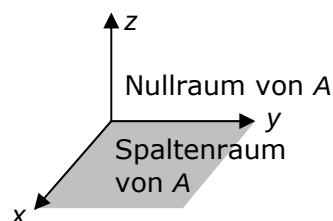
iii) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2), \mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4), \mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3),$
 $\mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

94. Wir betrachten ein rechtwinkliges xyz -Koordinatensystem.
(5.5.14)

i) Zeigen Sie, dass der Nullraum von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

aus allen Punkten der z -Achse besteht, und die xy -Ebene den Spaltenraum von A bildet.



ii) Bestimmen Sie eine 3×3 -Matrix, deren Nullraum die x -Achse und deren Spaltenraum die yz -Ebene ist.

Übungen zur Linearen Algebra 1

Studiengang Mathematik, Blatt 11

- 95.**
(5.6.4,7,8)
- | | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Format von A | 3×3 | 3×3 | 3×3 | 5×9 | 9×5 | 4×4 | 6×2 |
| $\text{rang}(A)$ | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| $\text{rang}(A \mid b)$ | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 | 2 |
- i) Berechne die Dimension des Zeilen-, des Spalten- und des Nullraumes von A und A^T .
- ii) Entscheide, ob $Ax = b$ konsistent ist und bestimme gegebenenfalls die Zahl der Parameter der allgemeinen Lösung.
- iii) Bestimme die Parameterzahl der allgemeinen Lösung von $Ax = 0$.
- 96.**
(5.6.6)
- Wie groß kann der Rang einer $m \times n$ -Matrix A höchstens sein? Wie groß ist der Defekt mindestens?
- 97.**
(5.6.9)
- Für welche $b_1, b_2, \dots, b_5$ ist das überbestimmte System
- $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= b_1 \\ x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 - 4x_2 &= b_4 \\ x_1 + 5x_2 &= b_5 \end{aligned} \quad \text{konsistent?}$$
- 98.**
(5.6.13)
- Gibt es Skalare r und s , sodass
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{den Rang 1 oder 2 hat?}$$
- 99.**
(5.6.14)
- Sei A eine 3×3 -Matrix, deren Spaltenraum eine Ebene durch den Ursprung ist. Beschreibe den Zeilen- und den Nullraum von A .
- 100.**
(5.6.erg.Übg.12)
- Eine Matrix A ist genau dann vom Rang r , wenn sie eine $r \times r$ -Untermatrix mit nichtverschwindender Determinante besitzt und alle größeren quadratischen Unterdeterminanten null sind. (Untermatrizen von A sind alle Matrizen, die durch Streichen von Spalten und/oder Zeilen aus A entstehen, sowie die Matrix A selbst.) Berechne mit diesem Kriterium den Rang folgender Matrizen:
- i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
- iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Theorem LA1

Für $A \in K^{n \times n}$ und $T_A : K^n \rightarrow K^n$ mit $T_A(x) = Ax$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) A ist invertierbar.
- 2) $Ax = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung.
- 3) A hat die reduzierte Zeilenstufenform $\mathbf{1}_n$.
- 4) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.
- 5) $Ax = b$ ist für jede $n \times 1$ -Matrix b lösbar.
- 6) $Ax = b$ ist für jede $n \times 1$ -Matrix b eindeutig lösbar.
- 7) $\det(A) \neq 0$.
- 8) T_A ist bijektiv.
- 9) T_A ist surjektiv.
- 10) T_A ist injektiv.
- 11) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- 12) Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- 13) Die Spaltenvektoren von A erzeugen den Raum K^n .
- 14) Die Zeilenvektoren von A erzeugen den Raum K^n .
- 15) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis des K^n .
- 16) Die Zeilenvektoren von A bilden eine Basis des K^n .
- 17) $\text{rang}(A) = n$.
- 18) $\text{def}(A) = 0$.

$$A|b \xleftrightarrow[\text{Spaltenvertauschungen}]{\text{elem. Zeilenumformungen}} A'|b'$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} a'_{11} & & 0 & * & b'_1 \\ & a'_{22} & & & b'_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & a'_{kk} & \\ \hline & 0 & & 0 & \vdots \\ & & & & b'_m \end{array} \right)$$

Übungen zur Linearen Algebra 1 Studiengang Mathematik, Blatt 12

101. Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie

i) $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} A^k = 0 \Rightarrow \mathbf{1} - A$ ist invertierbar.

ii) $AB - BA = \mathbf{1} \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} A^k B - BA^k = kA^{k-1}$

102. i) Invertieren Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen von $C := (B, \mathbf{1}_3)$.

ii) Berechnen Sie die Produkte $A_l B$ und BA_r mit den Matrizen $A_l := (1 \ 2 \ 3)$ und $A_r := (1 \ 2 \ 3)^T$.

103. i) Bestimmen Sie für die erweiterte Matrix

$$(A | b) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Menge $\text{Lös}(A|b) \subseteq \mathbb{Q}^4$.

ii) Lösen Sie dieselbe Aufgabe im Restklassenkörper $\mathbb{Z}_3$. Schreiben Sie alle Lösungen explizit hin.

104. i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Unbekannte x_2 in dem linearen Gleichungssystem

$$Mx = (1 \ 2 \ 0 \ 3)^T.$$

105. i) Berechnen Sie für die Vektoren

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Zahlen $\frac{[u \ v \ w]}{[u \ v \ (u \times v)]}$ und $\frac{(u \times v) \cdot w}{\|u \times v\|^2}$,

wobei für drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ $[a \ b \ c] = \det(a \ b \ c)$ ist.

ii) Beweisen Sie für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $n := u \times v \neq 0$ die Gültigkeit der Formel

$$\frac{[u \ v \ w]}{[u \ v \ n]} = \frac{n \cdot w}{\|n\|^2}.$$

- 106.** Gegeben sind zwei Vektoren $u := (2, -5, 6)$ und $v := (3, 6, 9)$.
- i) Berechnen Sie die Projektion von u auf v sowie die zu v orthogonale Komponente von u .
 - ii) Berechnen Sie $\cos(u, v)$.

- 107.** Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die Aussagen i), ii) und iii).

Sei U ein Unterraum des Vektorraums V . Dann gilt für alle $u, v \in V$:

- i) $u, v \notin U \Rightarrow u + v \notin U$,
- ii) $u, v \notin U \Rightarrow u + v \in U$,
- iii) $u \notin U, v \in U \Rightarrow u + v \notin U$.

- 108.** Betrachtet wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4).$$

- i) Bestimmen Sie mit Hilfe der reduzierten Zeilenstufenform R der Matrix A
 - α) eine Basis vom Zeilenraum (A),
 - β) eine Basis vom Spaltenraum (A),
 - γ) eine Basis vom Nullraum (A).
- δ) Stellen Sie die Spalten c_1, c_2, c_3, c_4 als Linearkombination der ermittelten Basis dar.

- ii) Wie lautet die allgemeine Lösung $x = x_0 + x_h$ des inhomogenen LGS $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

- iii) Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren b_1, b_2 an, für die das LGS $Ax = b$ nicht lösbar ist, d. h. die nicht im Spaltenraum von A liegen.

109. Stimmt's?

	ja	nein
Man kann je zwei Vektoren eines Vektorraums addieren.	☐	☐
Man kann einen Vektor v durch einen Vektor w dividieren, falls $w \neq 0$ ist.	☐	☐
Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn mindestens eine Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$ den Nullvektor ergibt.	☐	☐
Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn ihre Summe 0 ist.	☐	☐
Ist S ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V , so ist jeder Vektor durch höchstens eine Linearkombination der Vektoren aus S darstellbar.	☐	☐
Welche der folgenden Objekte haben eine Dimension?		
Ein Vektor,	☐	☐
eine Linearkombination,	☐	☐
eine Basis,	☐	☐
ein Unterraum.	☐	☐
Sei V ein Vektorraum.		
Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.	☐	☐
Wenn eine Basis von V endlich ist, sind alle Basen von V endlich.	☐	☐
Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Vektoren der Form (x, x, x) .	☐	☐
Jeder Vektor der Form (x, x, x) kann zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.	☐	☐